

Apuntes de Transmisión del calor

Agustín Martín Domingo

agustin6martin@gmail.com

Departamento de Física e Instalaciones

E.T.S. Arquitectura de Madrid

Universidad Politécnica de Madrid

Copyright

“Apuntes de Transmisión del Calor”

Copyright (C) 1995-2015 Agustín Martín Domingo <agustin6martin@gmail.com>

Algunos derechos reservados.

Versión 2.6, julio de 2015.

Licencia de distribución

Este trabajo se distribuye bajo una licencia *Creative Commons* Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 España (CC-BY-SA-NC).

Para ver una copia de esta licencia, visite la página de la licencia

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

o envíe una carta a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, EEUU.

Estos apuntes se hacen públicos con la intención de que sean útiles. Aunque se ha tenido cuidado durante su preparación no puede descartarse que aún contengan errores. El autor no garantiza que el contenido de estos apuntes esté libre de errores.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain License. To view a copy of this license, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>

or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

These notes are provided in the hope they are useful. While precaution has been taken during its preparation, it is possible that notes still contain some errors. There is absolutely no warranty about its contents.

Resumen de la licencia:

Está permitido...

- Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra
- Hacer obras derivadas

Bajo las siguientes condiciones

Reconocimiento: Se deben reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador.

No comercial: No se puede utilizar esta obra para fines comerciales.

Compartir bajo la misma licencia: Si se altera o se transforma esta obra, o se genera una obra derivada, sólo se puede distribuir la obra generada bajo una licencia similar a ésta.



Indice

1. Transmisión del calor: conducción y convección.	3
1.1. Campo de temperaturas y gradiente de temperaturas.	3
1.2. Descripción del flujo de calor.	4
1.3. Ley de Fourier para medios isotropos.	5
1.4. La ecuación diferencial de la conducción.	6
1.4.1. Ecuación diferencial de la conducción en un sólido isotropo.	8
1.4.2. Ecuación diferencial de la conducción en un sólido anisotropo.	9
1.4.3. Condiciones para la resolución del problema.	9
1.4.4. Tipos de condiciones de contorno.	10
1.5. Transmisión del calor por convección.	10
1.5.1. Convección forzada.	13
1.5.2. Convección libre o natural.	14
1.5.3. Convección con cambio de fase.	15
1.6. Casos particulares de conducción y convección en régimen permanente.	16
1.6.1. Transmisión del calor por conducción y convección a través de muros de paredes planas.	16
1.6.2. Transmisión del calor por conducción y convección a través de paredes cilíndricas.	20
1.6.3. Transmisión del calor por conducción y convección a través de paredes esféricas.	24
2. Fenómenos de transporte: procesos de difusión.	26
2.1. Conceptos fundamentales y leyes.	26
2.2. Difusión del vapor.	27
2.2.1. La ley de transporte del vapor de agua.	28
2.2.2. Difusión del vapor a través de paredes planas simples y compuestas.	28
2.3. Difusión térmica.	30
3. Transmisión del calor: radiación.	31
3.1. Conceptos básicos del intercambio de calor por radiación.	31
3.1.1. Ondas electromagnéticas. El espectro de la radiación electromagnética.	31
3.1.2. Definiciones previas.	33
3.1.3. Absorción, reflexión y transmisión de la radiación.	34
3.2. Leyes de la radiación.	36
3.2.1. Radiación en el interior de una cavidad.	36
3.2.2. Cuerpo negro. Ley de Planck.	37
3.2.3. Ley del desplazamiento de Wien.	39
3.2.4. Ley de Rayleigh-Jeans.	40
3.2.5. Ley de Stefan-Boltzmann.	40
3.2.6. Emisividad. Ley de Kirchoff.	41
3.2.7. Cuerpo gris.	43
3.2.8. La ley de Lambert.	44
3.3. El efecto invernadero.	46
3.4. Superficies selectivas.	46
3.5. Radiación directa entre cuerpos a distinta temperatura.	48
3.5.1. Radiación efectiva.	48
3.5.2. Planos infinitos y paralelos.	50
3.5.3. Intercambio de calor por radiación entre planos grises infinitos y paralelos	52
3.5.4. Transferencia de calor por radiación entre un cuerpo y su entorno.	54
3.5.5. Obtención general del factor de forma.	56
3.5.6. Intercambio de calor por radiación en un recinto de paredes convexas o planas de distintos materiales.	57
3.5.7. Cálculo analítico del factor de forma en sistemas sencillos de superficies rectangulares.	62
Indice alfabético	68
Referencias	71

Augustine's Moral Dilemma

Introducción

La energía calorífica se transmite desde las zonas de alta temperatura a las de baja temperatura, en un proceso que va acompañado de un cambio de entropía hasta que se alcanza, si es posible, el estado de equilibrio térmico caracterizado por una distribución uniforme de temperaturas. Denominamos *calor* a la transferencia de energía que tiene lugar sin un movimiento ordenado del sistema, en contraposición a la transferencia de energía que tiene lugar con un movimiento ordenado durante la realización de un trabajo mecánico.

La Termodinámica de los procesos reversibles estudia la transferencia de energía en éstos, pero siempre a lo largo de una sucesión de estados de equilibrio. Sin embargo, en un proceso de intercambio de calor entre cuerpos a distintas temperaturas, en tanto se mantenga una diferencia finita de temperaturas entre los mismos habrá un flujo irreversible de calor entre dichos cuerpos y no tendremos estados de equilibrio. Sin embargo, sí podemos tener estados en los que las variables macroscópicas del sistema no cambian con el tiempo, pero que no corresponden a estados de equilibrio sino a estados estacionarios en los que se mantienen constantes las temperaturas de los distintos cuerpos involucrados y el flujo de calor entre ellos. También podemos tener situaciones en las que el sistema está evolucionando con el tiempo y ni siquiera tenemos estados estacionarios.

La transmisión del calor entre sistemas a distintas temperaturas tiene lugar por tres mecanismos básicos:

Conducción: La energía calorífica se transmite durante el contacto directo entre cuerpos (o partes de los mismos) a distintas temperaturas y tiene lugar mediante choques o acoplamientos entre las moléculas del sistema (unas en zonas más calientes, con mayor energía térmica y otras en las zonas más frías, con menor energía térmica), aunque no haya un movimiento macroscópico de las moléculas, o el material sea transparente a la radiación.

Este proceso es de gran importancia en sólidos, pero de menor importancia en líquidos y gases, donde normalmente aparece combinado con la convección y es prácticamente enmascarado por ésta.

Convección: La energía calorífica se transmite por el movimiento físico de moléculas “calientes” de las zonas de alta temperatura a las zonas de baja temperatura y viceversa, equilibrándose las temperaturas.

Este proceso tiene gran importancia en fluidos y también es denominado conducción superficial, ya que el flujo de calor entre la superficie de un material y un fluido está relacionado con la conducción a través de una fina capa del fluido que se encuentra junto a la superficie. Además, es este proceso de conducción superficial el que provoca, en un fluido inicialmente en reposo en contacto con una superficie a distinta temperatura, una diferencia de temperaturas en el fluido, originándose diferencias de densidad en el mismo que producirán a su vez un desplazamiento físico de materia a distintas temperaturas de unas zonas a otras, teniéndose convección (en este caso natural).

La transferencia de calor por convección puede ser forzada cuando está ayudada por el movimiento de las superficies en contacto con el fluido o libre (llamada también natural) cuando se produce únicamente en virtud de una diferencia de densidades causada por una diferencia de temperaturas. También puede venir acompañada de un cambio de fase, como ocurre durante la condensación o la ebullición, con unos intercambios de calor muy intensos.

Radiación: La energía calorífica se transmite en forma de energía de la radiación electromagnética, emitida por todos los cuerpos por el hecho de encontrarse a una temperatura T , y que se propaga a la velocidad de la luz (porque es luz de distintas longitudes de onda) y puede ser absorbida por los cuerpos, aumentando su temperatura.

La radiación es el único medio de transmisión del calor cuando ésta tiene lugar a través del vacío, y puede ser muy importante para altas temperaturas.

Estos mecanismos básicos actuarán de forma combinada, no sólo para dar la temperatura final del recinto que estamos estudiando, sino en combinación con otros elementos como la humedad del aire, para dar el grado de comodidad o confort del ser humano en el espacio considerado. Así, mayores o menores grados de humedad darán lugar a una sensación de comodidad mayor o menor para una misma temperatura. La acción del viento y de la radiación son también elementos a considerar. Por una parte, el viento favorece los procesos de convección y evaporación. Por otra

parte, para una misma temperatura en un lugar, el hecho de que éste esté soleado puede hacer más agradable la estancia en el mismo en invierno, no sólo por la luz sino por la radiación térmica que incide sobre la persona. De la misma forma, para una misma temperatura en una habitación la sensación térmica es más baja si paredes y suelo están aún fríos que si los mismos están ya calientes o incluso más calientes que el aire de la habitación.

Capítulo 1

Transmisión del calor: conducción y convección.

1.1. Campo de temperaturas y gradiente de temperaturas.

En la transmisión del calor por *conducción*, éste se propaga durante el contacto directo entre las partículas de un cuerpo y las de otro cuerpo que se encuentra a distinta temperatura o entre partes del mismo cuerpo que se encuentran a distintas T .

En los sólidos metálicos la transmisión del calor por conducción está relacionada con el movimiento de los electrones no ligados y con la transferencia de energía producida en los choques entre los mismos, de forma que hay relación estrecha entre las conductividades térmica y eléctrica. En sólidos aislantes la transferencia de energía por conducción está relacionada con las diferentes características de las vibraciones de la red cristalina (fonones) entre zonas a distinta temperatura. En ningún caso se produce un movimiento físico de las partículas. En fluidos la conducción se produce por choques entre moléculas a distinta temperatura. En la teoría analítica de la conducción del calor, no se tiene en cuenta la estructura molecular de la sustancia, ni como es el mecanismo microscópico de transmisión, sino que se considera la materia como un medio continuo.

Sólo puede haber transmisión del calor por conducción cuando hay cuerpos o sistemas a distintas temperaturas (al igual que ocurre en otras formas de transmisión del calor). En general, hay variaciones de temperatura con el tiempo y la distribución de temperaturas en el sistema es no uniforme, por lo que en realidad lo que se tiene es una distribución espacio-temporal de la temperatura, lo que se conoce como un *campo de temperaturas*:

$$T = f(x, y, z, t)$$

Para un campo estacionario, no hay variación temporal de la temperatura, y se tiene que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow T = f(x, y, z)$$

Si además de estacionario el proceso es unidimensional en la dirección x , se tiene que

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{y por tanto,} \quad T = T(x)$$

Se denomina *superficie isoterma* al lugar geométrico de los puntos del cuerpo que están a la misma temperatura. Como un mismo punto no puede estar a la vez a dos temperaturas distintas, *las superficies isotermas no se cruzan*.

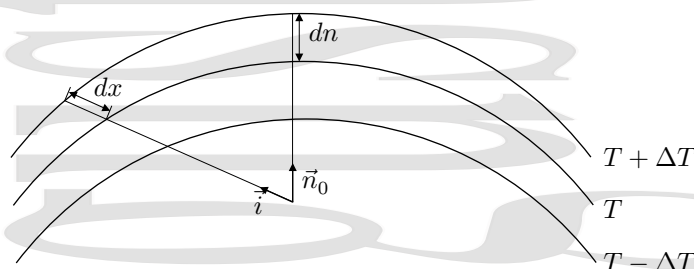


Figura 1-1: Isotermas en un campo de temperaturas.

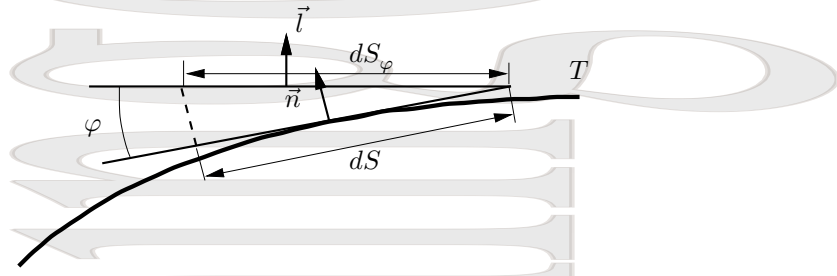


Figura 1-2: Relación entre las superficies dS y dS_φ .

La mayor variación relativa de temperatura tiene lugar en la dirección normal a las superficies isotermas (figura 1-1), a la que apunta el gradiente:

$$\vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial T}{\partial n} \cdot \vec{n}_0 \quad (1-1)$$

donde \vec{n}_0 es el vector unitario en la dirección normal a la isoterma y $\partial T/\partial n$ es la derivada parcial de la temperatura en la dirección normal a las isotermas.

1.2. Descripción del flujo de calor.

A la hora de describir el flujo de energía calorífica utilizaremos distintas magnitudes.

Denominamos *densidad de flujo térmico* \vec{q} en un punto del flujo a la cantidad de calor que se transmite por unidad de tiempo y superficie a través de una pequeña superficie perpendicular al flujo en ese punto. La densidad de flujo es un vector dirigido en la dirección y sentido del flujo y tiene dimensiones de flujo de energía por unidad de superficie (W/m^2 en el sistema internacional) al igual que la intensidad de una onda.

Denominamos *flujo de calor* Φ al calor transmitido por unidad de tiempo a través de una superficie S siendo, en función de la densidad de flujo,

$$\Phi = \int_S \vec{q} d\vec{S} \quad [\Phi] = \text{W en S.I.} \quad (1-2)$$

con dimensiones de energía por unidad de tiempo al igual que la potencia.

Por tanto, el calor total que atraviesa una superficie dada en un intervalo de tiempo t vendrá dado por

$$Q_t = \int_0^t \Phi dt = \int_0^t dt \int_S \vec{q} d\vec{S} \quad [Q] = \text{julios en S.I.} \quad (1-3)$$

La cantidad de calor que fluye por unidad de tiempo y superficie a través de una superficie elemental que forma un ángulo φ con la superficie perpendicular al flujo es:

$$q_\varphi = q \cos \varphi = \frac{\delta^2 Q_t}{dt dS} \cos \varphi = \frac{\delta^2 Q_t}{dt} \underbrace{\frac{\cos \varphi}{dS}}_{dS = dS_\varphi \cos \varphi} = \frac{\delta^2 Q_t}{dt dS_\varphi} \quad (1-4)$$

donde $dS = \cos \varphi dS_\varphi$ es la proyección de la superficie dS_φ sobre el plano perpendicular al flujo (en medios isótropos tangente a la isoterma), como se ve en la figura 1-2. Así, a través de dS_φ fluye una cantidad de calor:

$$dQ_t = q_\varphi dS_\varphi dt = q \cos \varphi \frac{dS}{\cos \varphi} dt = q dS dt \quad (1-5)$$

igual que a través de la superficie dS que es la proyección sobre la superficie perpendicular al flujo.

Tabla 1-1: Conductividades térmicas para diversos materiales.

Material	λ (cal/cm·s·°C)	λ (W/m·°C)
Acero al carbono	0,11	46,05
Acero cromo-níquel (18 % cromo, 8 % níquel)	0,039	16,3
Agua	0,00143	0,598
Aire a 0°C	0,000055	0,023
Alúmina (Al ₂ O ₃)	0,0016 – 0,0084	0,67 – 3,5
Aluminio	0,480	200,9
Amianto (suelto)	0,0004	0,167
Hormigón 20 – 1000°C	0,0027	1,13
Cobre	0,96	401
Corcho	0,00012	0,05
Hierro (sin tratar)	0,175	73
Ladrillo refractario 0 – 800°C	0,004	1,67
Lana de vidrio	$9,01 \cdot 10^{-5}$	0,038
Madera de pino		
Según fibra	$8,2 \cdot 10^{-4}$	0,34
Perp. a fibra	$2,6 \cdot 10^{-4}$	0,11
Vidrio (ventana)	$1,86 \cdot 10^{-3}$	0,78

1.3. Ley de Fourier para medios isotrópicos.

Para que se produzca transmisión del calor y en particular transmisión del calor por conducción la distribución de temperaturas debe ser no uniforme, es necesario que haya un gradiente de temperaturas entre distintos puntos del cuerpo. Si se considera un sistema de ejes coordenados en el cual uno de ellos está dirigido en la dirección perpendicular a la superficie isoterma en un punto y los otros en la dirección paralela (tangentes a la isoterma en ese punto) sólo habrá diferencia de temperaturas en la dirección perpendicular a la isoterma, pero no en las direcciones tangentes a la misma. Por tanto, el flujo de calor debe tener lugar en la dirección perpendicular a las isotermas, sin componente en las direcciones tangentes a la misma, ya que al ser el medio isotrópico todas las direcciones son equivalentes.

La ley de Fourier para medios isotrópicos establece que la cantidad de calor δQ_t que pasa a través de un elemento de superficie $d\vec{S}$ de la isoterma en el intervalo de tiempo dt es proporcional al gradiente de temperaturas, $(\partial T/\partial n)\vec{n}_0$ en la forma:

$$\delta^2 Q_t = -\vec{n}_0 \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\vec{S} dt = -\lambda \vec{\nabla} T d\vec{S} dt \quad [\delta Q] = \text{julios (S.I.)} \quad (1-6)$$

aunque es preferible representarlo en función de la densidad de flujo térmico,

$$\vec{q} = \frac{d^2 Q_t}{d\vec{S} dt} = -\vec{n}_0 \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{d\Phi}{d\vec{S}} \vec{n}_0 = -\lambda \vec{\nabla} T \quad [q] = \text{W/m}^2 \text{ en S.I.} \quad (1-7)$$

que expresa la ley básica de la conducción del calor en medios isotrópicos, la densidad de flujo térmico \vec{q} (energía transmitida por unidad de superficie y tiempo) es proporcional al gradiente de temperaturas.

El factor de proporcionalidad λ es una propiedad física de la materia que describe la capacidad que tiene la sustancia para conducir el calor y a la que se denomina *conductividad térmica*. En la tabla 1-1 se dan algunos ejemplos de conductividades térmicas para distintos materiales.

$$[\lambda] = \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} \quad (\text{S.I.}) \quad \text{o} \quad \frac{\text{cal}}{\text{seg} \cdot \text{m}^\circ\text{C}}$$

Cuanto mayor es la conductividad térmica λ mayor es el flujo de calor para un mismo gradiente de temperaturas y viceversa.

Para un sólido isotrópico, el flujo térmico y el calor total que fluye en un cierto intervalo de tiempo se representarían como

$$\Phi = \int_S \vec{q} d\vec{S} = - \int_S \lambda \vec{\nabla} T d\vec{S} = - \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\vec{S} \vec{n}_0 \quad [\Phi] = \text{W en S.I.}$$

y

$$Q_t = - \int_0^t \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\vec{S} \vec{n}_0 dt = \int_0^t dt \int_S \vec{q} d\vec{S} \quad [Q] = \text{julios en S.I.} \quad (1-8)$$

A través de una superficie elemental dS_φ que forma un ángulo φ con la superficie perpendicular al flujo (aquí tangente a la isoterma) fluye en el tiempo t un calor:

$$Q_t = - \int_0^t \int_{S_i} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cos \varphi dS_\varphi dt = - \int_0^t \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS dt \quad (1-9)$$

1.4. La ecuación diferencial de la conducción.

Para obtener las ecuaciones físicas que rigen la conducción, estudiaremos el fenómeno en un intervalo de tiempo pequeño y en un elemento de volumen infinitesimal del medio. Como en otras ocasiones en las que nos interesan valores promedio nos olvidaremos de la constitución íntima de la materia, considerando a ésta como un medio continuo y nos restringiremos a los casos en los que se cumple:

1. El medio es homogéneo e isótropo. Por lo tanto, sus propiedades físicas son las mismas en todos los puntos del mismo, y no dependen de la dirección en que se midan.
2. Los parámetros físicos son constantes en el medio.
3. Las variaciones de volumen producidas por los cambios de temperatura son pequeñas comparadas con el volumen del cuerpo. Por lo tanto, el trabajo mecánico realizado es prácticamente nulo, $W \simeq 0$.
4. Las fuentes internas de calor, que dan una energía por unidad de tiempo y de volumen $q_v = f(x, y, z, t)$, están distribuidas de forma uniforme en el cuerpo.

La deducción que se presenta a continuación está basada en la ecuación del balance de la energía que surge directamente del primer principio de la Termodinámica en el caso particular de trabajo nulo

$$\delta Q_S + \delta Q_V = dU \quad (1-10)$$

En esta expresión, δQ_S representa el calor neto intercambiado con el exterior por parte del elemento de volumen considerado a través de sus superficies límite (considerándose positivo si es absorbido por el elemento), δQ_V el calor aportado o absorbido por fuentes internas de calor, y dU la variación de energía interna de dicho elemento de volumen. Como no hay trabajo mecánico, $\delta W = 0$.

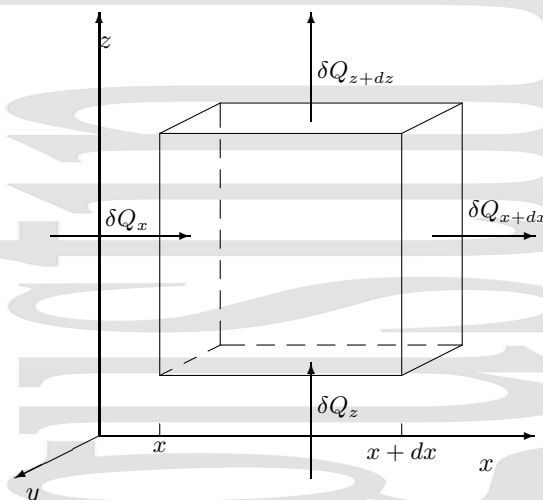


Figura 1-3: Elemento de volumen fijo en el espacio utilizado para la obtención de la ecuación diferencial de la conducción.

El calor que entra por la cara x en la dirección Ox viene dado por:

$$\delta Q_x = q_x dydzdt$$

mientras que el calor que sale por la cara $x + dx$ en la dirección Ox es:

$$\delta Q_{x+dx} = q_{x+dx} dydzdt$$

Si desarrollamos q_{x+dx} en serie de Taylor hasta primer orden, se tiene:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

quedando el calor neto que entra o sale en la dirección x en la forma:

$$\delta Q_{x_S} = (q_x - q_{x+dx}) dx dy dz dt = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt.$$

En esta expresión, la contribución Q_x es positiva (calor entrante en el elemento de volumen) si la componente q_x de la densidad de flujo en x lo es y la contribución Q_{x+dx} es negativa (calor saliente del elemento de volumen) si la componente q_{x+dx} es positiva. Análogamente se procede con los calores netos en las direcciones y y z :

$$\delta Q_{y_S} = (q_y - q_{y+dy}) dx dy dz dt = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy dz dt$$

$$\delta Q_{z_S} = (q_z - q_{z+dz}) dx dy dz dt = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dx dy dz dt$$

Esto da, para el balance neto total de calor a través de todas las caras del elemento de volumen, la ecuación:

$$\delta Q_S = -\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right] dx dy dz dt, \quad (1-11)$$

que a su vez da la cantidad neta de calor que entra en el elemento de volumen considerado a través de sus superficies. En realidad, podríamos haberla derivado directamente del *Teorema de Gauss* con un convenio de signos contrario para el flujo de \vec{q} ,

$$-\frac{\delta Q_S}{dt} = \oint \vec{q} d\vec{S} = \int_{dV} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV \quad (1-12)$$

Consideremos ahora la parte debida a las fuentes internas de calor en el elemento de volumen considerado. Si denominamos q_v a la energía calorífica suministrada por unidad de volumen y tiempo por las fuentes internas de calor que se encuentran en dicho elemento de volumen dV (las unidades de q_v en el S.I. serán W/m^3), tendremos:

$$\delta Q_V = q_v dV dt = q_v dx dy dz dt \quad (1-13)$$

Consideremos finalmente la variación de la energía interna para un proceso a volumen constante en el elemento de volumen considerado, que se encuentra fijo en el espacio. En un intervalo de tiempo dt , esta variación tiene la forma:

$$dU = dC_v dT = dC_v \frac{\partial T}{\partial t} dt = \rho dV c_v \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

donde $dC_v = \rho c_v dV$ es la capacidad calorífica a volumen constante del elemento de volumen. Nótese que implícitamente se ha desarrollado dT en serie en función de sus variables x, y, z y t , pero al estar el elemento de volumen fijo en el espacio sólo aparece la dependencia temporal. Así, al hacer las sustituciones correspondientes en la ecuación (1-10) queda

$$-\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right] dx dy dz dt + q_v dV dt = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} dV dt$$

que se puede escribir como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c_v} \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + \frac{q_v}{\rho c_v}$$

o, de forma más compacta, en la forma:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + q_v \quad (1-14)$$

Esta expresión es la ecuación diferencial de la energía para procesos de intercambio de calor por conducción a volumen constante.

Tabla 1-2: Difusividades térmicas para diversos materiales.

Material	α (cm ² /s)
Aluminio	0,826
Acero al carbono	0,12
Alúmina (Al ₂ O ₃)	0,0023 – 0,00116
Aire a 0°C	0,179
Amianto (suelto)	0,0035
Ladrillo refractario 0 – 800°C	0,0074
Hormigón 20 – 1000°C	0,0056
Corcho	0,0017
Agua	0,00143
Madera de pino	
Según fibra	0,0036
Perp. a fibra	0,0012

1.4.1. Ecuación diferencial de la conducción en un sólido isótropo.

Como hemos visto (1-7), en un sólido isótropo el transporte de energía por conducción obedece a la *ley de Fourier* para medios isótropos, que tiene la forma $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$ o $q_i = -\lambda (\vec{\nabla} T)_i$, y en los sólidos éste es el mecanismo predominante. En éstos además se cumple de forma aproximada que $c_p \simeq c_v \simeq c$, por lo que la ecuación diferencial de la conducción para sólidos isótropos queda:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \vec{\nabla} \cdot (-\lambda \vec{\nabla} T) + \frac{q_v}{\rho c}$$

o, escrito de otra manera, se tiene la ecuación diferencial de la conducción en la forma en que ésta se escribe habitualmente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c} \quad (1-15)$$

en la que $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$ es la *difusividad térmica* [m²/s en S.I.] y donde se ha considerado únicamente el caso en el que λ es independiente de la posición, $\lambda \neq \lambda(x, y, z)$. La difusividad térmica da una medida de la inversa de la inercia térmica del sistema, mientras que la conductividad térmica λ es una medida de la facilidad con que el sistema conduce calor. En efecto, para una misma distribución de temperaturas $T(x, y, z)$, la temperatura variará tanto más rápido cuanto mayor es la difusividad térmica α mientras que el flujo en esas mismas condiciones es tanto mayor cuanto mayor es la conductividad térmica λ . La difusividad térmica α es tanto mayor cuanto mayor es la conductividad térmica λ del material y tanto menor cuanto mayores son la densidad o el calor específico del material. Algunos ejemplos de valores de la difusividad térmica se dan en la tabla 1-2 para distintos materiales.

Si no hay fuentes internas de calor ($q_v = 0$) queda la *ecuación de Fourier*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (1-16)$$

Si hay fuentes internas de calor, pero el sistema ha alcanzado el *régimen permanente* o *estacionario* (sus variables termodinámicas no cambian con el tiempo), queda la *ecuación de Poisson*:

$$\alpha \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \quad (1-17)$$

Finalmente, si tenemos conducción en régimen estacionario, y además no hay fuentes internas de calor queda la *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T = 0 \quad (1-18)$$

1.4.2. Ecuación diferencial de la conducción en un sólido anisótropo.

Cuando el sólido es anisótropo, la transmisión del calor por conducción depende de la dirección del flujo térmico. En este caso, la ley de Fourier (1-7) toma la forma

$$\vec{q} = -[\lambda_{ij}] \vec{\nabla} T \quad \text{o} \quad \vec{q} = -\hat{\lambda} \vec{\nabla} T \quad (1-19)$$

que en forma matricial se escribiría

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1-20)$$

donde en vez de una conductividad térmica escalar λ aparece el *tensor conductividad térmica* $\hat{\lambda}$ (o $[\lambda_{ij}]$). Este tensor es un tensor simétrico de segundo orden, y por tanto existe un sistema de ejes (ejes principales) en los cuales es diagonal, denominándose en ese caso a los valores de la diagonal valores propios del tensor conductividad térmica o *conductividades térmicas principales*. En estos ejes principales, la ley de Fourier se expresa como

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial r_1} \\ \frac{\partial T}{\partial r_2} \\ \frac{\partial T}{\partial r_3} \end{pmatrix} \quad (1-21)$$

donde r_1, r_2 y r_3 corresponden a los ejes a lo largo de las direcciones principales. De esta forma, la ecuación general de la conducción para medios anisótropos queda en la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \vec{\nabla} (\hat{\lambda}_{ij} \vec{\nabla} T) + \frac{q_v}{\rho c} \quad (1-22)$$

Si la conductividad térmica es uniforme, esto es, no depende del punto del medio, ésta es constante frente a las derivadas espaciales de $\vec{\nabla} T$ y la ecuación general de la conducción se puede escribir, en el sistema de ejes principales, como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \left[\lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial r_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial r_2^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 T}{\partial r_3^2} \right] + \frac{q_v}{\rho c} \quad (1-23)$$

Para el caso isótropo todas las λ_i son iguales y el tensor conductividad térmica es diagonal con las tres componentes iguales (a la conductividad térmica escalar λ) en cualquier sistema ortogonal de ejes de referencia. Así, en el caso isótropo, la ley de Fourier se reduce a la expresión (1-7) en función de la conductividad térmica escalar, y la ecuación general de la conducción a la expresión (1-15).

1.4.3. Condiciones para la resolución del problema.

La teoría de la conducción intentará encontrar soluciones particulares para estas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y otras ecuaciones que describen la conducción. Así, para resolver cada problema concreto habrá que establecer:

Condiciones geométricas, características de la forma y tamaño del cuerpo en el que tiene lugar la conducción. Describen el recinto objeto de estudio.

Propiedades físicas de la sustancia en la que tiene lugar la conducción (λ, ρ, c).

Distribución inicial de temperaturas en el cuerpo, $T_0 = f(x, y, z, t_0)$. Si la distribución es uniforme, $T = T_0$ para $t = t_0$ en todo el cuerpo. En algunos casos de régimen permanente, bastarán las condiciones de contorno en los límites del recinto.

Condiciones de contorno que describen las interacciones del cuerpo con el medio externo.

1.4.4. Tipos de condiciones de contorno.

Estas condiciones de contorno pueden ser:

Condiciones de contorno de primera especie, también conocidas como *condiciones de contorno de Dirichlet*. Se da la distribución de temperaturas en la superficie del sólido en cada instante (es decir, el valor del campo de temperaturas T).

$$T = f(x, y, z, t)$$

Éste es el tipo de condición de contorno que se verá en el estudio del muro simple sin convección en la sección 1.6.1, donde se da la temperatura en las superficies externas.

Condiciones de contorno de segunda especie, también conocidas como *condiciones de contorno de von Neumann*. Se trata de condiciones de contorno en la derivada del campo de temperaturas, dada por $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$. Así, se da la densidad de flujo calorífico para cada punto de la superficie en cada instante.

$$q_{\text{sup}} = f(x, y, z, t)$$

Por ejemplo, en el caso de dos superficies perfectamente juntas, a través de las cuales fluye el calor, la densidad de flujo es la misma para las dos.

Condiciones de contorno de tercera especie. Se da la temperatura exterior y la ley que gobierna la transferencia de calor entre la superficie del cuerpo y sus alrededores. El proceso de transferencia de calor que tiene lugar entre la superficie de un cuerpo y el exterior obedece a la *ley de enfriamiento de Newton*, siendo la cantidad de calor intercambiada por unidad de superficie y de tiempo proporcional a la diferencia de temperaturas entre el medio exterior (T_∞) y la superficie (T_S):

$$\frac{\Phi}{S} = q = h(T_S - T_\infty), \quad \text{con } [h] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}} \quad \text{en el S.I.} \quad (1-24)$$

donde h es el *coeficiente de transmisión superficial del calor*, *coeficiente de película*, *coeficiente de transmisión aire-superficie* o, como veremos en el apartado 1.5, *coeficiente de convección*.

Así, en régimen permanente se cumple, para la densidad de flujo en el principio del sólido y para la densidad de flujo por convección

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = -\frac{h}{\lambda} (T_S - T_\infty)$$

Este es el tipo de condición de contorno que se utiliza cuando la convección está presente.

Condiciones de contorno de cuarta especie. Los cuerpos están en contacto perfecto y se igualan los flujos térmicos transmitidos entre ellos. Éste es el tipo de condición de contorno que se utiliza en el estudio de la transmisión del calor a través de la superficie de separación de dos paredes planas o cilíndricas (o de otra forma) que están en contacto perfecto.

Es decir, se da el flujo térmico $\Phi(x, y, x, t)$ a través de toda la superficie.

1.5. Transmisión del calor por convección.

La transferencia de calor por *convección* está asociada al movimiento de un fluido, que actúa como portador de energía entre zonas del mismo que se encuentran a distinta temperatura (mediante el movimiento físico de partículas a distinta temperatura entre regiones del fluido a distinta temperatura) y entre el fluido y las superficies sólidas con las

que éste intercambia calor. En la transmisión del calor por convección las características del flujo (perfil de velocidades, régimen del flujo) influyen notablemente en el proceso de intercambio de calor. Por ello, para un análisis de la misma se necesita estudiar en paralelo el flujo de energía y la dinámica del movimiento del fluido que está actuando como portador de ese flujo. Obviamente la convección aparecerá únicamente en fluidos, que es donde puede producirse este movimiento de materia. La convección puede ser natural o forzada.

Consideremos un fluido que inicialmente se encontrara en un campo gravitatorio en contacto con superficies también en reposo. Si en este fluido hay regiones a distinta temperatura la densidad en las mismas será distinta. Si las zonas más densas por más frías son las que se encuentran en la parte superior, éstas se mueven hacia las zonas de menor densidad que se encuentran en la parte inferior (más caliente) desplazando el fluido que allí se encuentra. Por ejemplo, en un radiador[†] el aire frío, al ser más denso que el aire caliente va hacia las zonas más bajas, desplazando al aire caliente que asciende hacia las zonas más altas. Se establece así una circulación de materia (el fluido) que lleva asociado un flujo de energía y que tiende a igualar la temperatura del conjunto del gas. Este proceso corresponde a la denominada *convección natural* en la que el fluido se mueve espontáneamente en el campo de fuerza gravitatorio como consecuencia de las diferencias locales de densidad entre las zonas calientes y frías.

Por el contrario, se dice que se tiene *convección forzada* cuando algunas de las paredes en contacto con el fluido se mueven favoreciendo la circulación de éste.[‡] También se habla de convección forzada cuando hay cualquier efecto de origen no local que favorece el movimiento, como el viento.

Consideremos una superficie sólida que se encuentra a una temperatura T_S , en contacto con un fluido a distinta temperatura T_∞ . Como hemos visto, en estas condiciones se produce convección. El flujo térmico por unidad de superficie entre el fluido y la superficie se representa mediante la relación empírica conocida como *ley de enfriamiento de Newton*

$$\frac{\Phi}{S} = h(T_S - T_\infty). \quad (1-24)$$

Esta ley es equivalente al caso de las condiciones de contorno de tercera especie que se presenta en la página 10, donde h es el denominado *coeficiente de convección*, *coeficiente de película*, *coeficiente de transmisión superficial del calor* o *coeficiente de transmisión del calor aire-superficie*.

Aunque en muchos casos es posible medir experimentalmente el coeficiente de convección h para unas condiciones dadas, en general es difícil hacer un modelo más general para el mismo. El coeficiente h no es un parámetro fijo, sino que depende, de una forma en general compleja, de distintas variables como el tipo de flujo (laminar o turbulento), la viscosidad y conductividad térmica del fluido, la geometría del problema (con las dimensiones del sistema y la posible presencia de otras superficies que limiten la convección), el estado de las superficies, la velocidad del fluido, las temperaturas, el calor específico del fluido, el coeficiente de dilatación y la densidad del fluido (estos dos especialmente para convección natural) o el tipo de convección. Por ejemplo, la convección en la pared exterior de un edificio será, para una misma diferencia de temperaturas, distinta de la convección en la pared interna de una habitación, ya que en la primera se desarrolla a lo largo de toda la altura de la fachada del edificio, mientras que en la segunda se desarrolla sólo a lo largo de la altura de la habitación.

En un análisis detallado ni siquiera el coeficiente de convección es uniforme en toda la superficie y lo que normalmente se conoce como h es en realidad un valor promedio en la superficie, el *coeficiente de convección promedio*,

$$\bar{h} = \frac{1}{S} \int_S h dS. \quad (1-25)$$

El movimiento del fluido producido por la convección a lo largo de la superficie tiene características similares a las que se estudian en los libros de hidrodinámica. Así en la misma superficie se satisface la denominada *condición de no deslizamiento* en la que el fluido está en reposo respecto a la superficie como consecuencia del predominio absoluto de las fuerzas viscosas sobre las de inercia. Según nos separamos de la superficie, la influencia de las fuerzas de inercia va aumentando, aunque en una primera zona, denominada *capa límite* la velocidad cambia de forma significativa según nos alejamos de la superficie. Al principio de establecerse el contacto con la superficie y en general cerca de la misma

[†] Mal llamado radiador, porque en realidad el calentamiento tiene lugar principalmente por convección, natural cuando no hay ventilador, y forzada cuando se utiliza ésta para aumentar el intercambio de calor. Curiosamente las estufas de infrarrojos serían las que calentarían más por radiación.

[‡] Por ejemplo, un termo-ventilador o convector de los denominados convectores, en los que las palas de un ventilador favorecen el movimiento del fluido.

siguen predominando las fuerzas viscosas y se tiene flujo *laminar* (esto es, ordenado en capas), pero dentro de la misma capa límite el flujo se puede hacer *turbulento* (movimiento más desordenado) al alejarnos de la superficie o avanzar en contacto con la misma, dependiendo de las características del flujo, aunque siga habiendo una *subcapa laminar* en las proximidades de la superficie. A una cierta distancia de la superficie la variación de la velocidad con la distancia a la misma se hace muy pequeña y abandonamos la capa límite, teniéndose régimen turbulento fuera de ésta. Para describir los límites de la capa límite se utiliza el criterio de región próxima a la superficie en la que la velocidad media es menor que el 99 % de la velocidad v_∞ en el flujo libre (alejado de la superficie, donde ya no hay variación). Al igual que en el caso general de flujo en tuberías, el paso de régimen laminar a turbulento en la capa límite se caracteriza mediante una magnitud adimensional denominada *número de Reynolds* Re , definido como

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu} \quad (1-26)$$

con ρ la densidad, L una longitud característica cuya elección depende del sistema concreto, μ la viscosidad dinámica y $\nu = \mu/\rho$ la viscosidad cinemática. El número de Reynolds representa una cierta relación entre la importancia de las fuerzas de inercia y la de las fuerzas viscosas en el flujo. En la mayoría de los cálculos analíticos el *número de Reynolds crítico* para la transición entre flujo laminar y turbulento en la capa límite sobre una placa plana se toma como $5 \cdot 10^5$, pero en realidad depende fuertemente de la rugosidad de la superficie y de la intensidad de la turbulencia de la corriente libre.

Nótese que tanto la definición de número de Reynolds como el valor del número de Reynolds crítico dependen de la geometría del problema. Así, en un problema de transmisión de calor por convección por un fluido que circula por una tubería deberíamos utilizar el diámetro D de la tubería en vez de L y el valor del número de Reynolds crítico también sería distinto (en particular el valor que se acaba de presentar es distinto del que aparece en hidráulica general en una tubería).

Además de la capa límite tradicional en el movimiento de fluidos, también llamada *capa límite de velocidad* o *hidrodinámica*, en la transmisión del calor por convección se tiene un segundo tipo de capa límite, la denominada *capa límite térmica*. La capa límite térmica separa la zona del fluido en la que la temperatura del mismo apenas varía al alejarse perpendicularmente de la superficie (y es prácticamente igual a la del fluido externo) de la zona del fluido en la que la temperatura varía rápidamente en la dirección perpendicular a la superficie. El espesor de la capa límite térmica se toma como el valor de la distancia perpendicular a la superficie para el que la diferencia de temperaturas $T - T_S$ con la misma es el 99 % de la diferencia de temperaturas entre la temperatura T_∞ del fluido en la zona donde ya no se produce variación de temperatura por convección y la temperatura T_S de la superficie. Así, dentro de la capa límite térmica se cumplirá

$$T_S - T < 0,99(T_S - T_\infty) \quad (1-27)$$

Todo esto hace que un estudio detallado del problema de la convección sea tan complejo. Una de las formas de abordar el problema es mediante tediosos cálculos de elementos finitos aplicados a la convección. Para algunos casos se han obtenidos expresiones semi-empíricas para h mediante los denominados *métodos de semejanza* o *análisis dimensional* en los que se describe el problema en función de ciertos parámetros adimensionales que no dependen de la escala del problema, como el número de Reynolds que acabamos de mencionar.

Uno de los más importantes es el *número de Nusselt* que se define como

$$Nu = \frac{\bar{h} L}{\lambda} \quad (1-28)$$

en función de la conductividad térmica del material λ , del coeficiente de convección promedio en la superficie \bar{h} y de una longitud característica del modelo dada por L (por ejemplo el diámetro de un cilindro o el lado de una placa) de forma que conociendo el número de Nusselt para el caso considerado es posible obtener el coeficiente de convección h . El número de Nusselt representa de alguna manera la relación entre las tasas de transferencia de calor por convección y por conducción en un fluido.

A la hora de tratar el problema de la convección surge otro problema práctico, cuando se coloca el termómetro en contacto con la superficie una parte del mismo está en contacto térmico con el fluido, afectando a las medidas de la temperatura. Esto hace que a menudo sea difícil medir con precisión la temperatura de la superficie y no haya más remedio que recurrir a métodos iterativos.

Tabla 1-3: Algunos rangos típicos de valores del coeficiente de convección h . Se incluyen los casos de vaporización y condensación.

h (W/m ² K)	Tipo de convección
5 – 25	Convección natural en el aire.
10 – 200	Convección forzada en el aire.
20 – 100	Convección natural en el agua.
50 – 10000	Convección forzada en el agua.
3000 – 100000	Agua en ebullición (evaporación).
5000 – 100000	Vapor de agua en condensación.

En la tabla 1-3 se muestran algunos rangos típicos de valores del coeficiente de convección para distintos fluidos y tipos de convección.

1.5.1. Convección forzada.

En buena parte de los casos el número de Nusselt para la convección forzada puede ajustarse por una expresión de la forma

$$Nu = cte Re^m Pr^n \quad (1-29)$$

donde Re es el número de Reynolds y Pr es el número de Prandtl, dado por

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad (1-30)$$

con α la difusividad térmica del fluido, L una dimensión característica del sistema y cte , n y m parámetros función de la geometría y del rango de números de Reynolds. El número de Prandtl representa la relación existente entre la difusividad de la cantidad de movimiento y la difusividad del calor. También se puede ver como la relación entre los espesores de la capas límite de velocidad y térmica. Nótese que mientras que los números de Reynolds y Grashoff (éste se verá más adelante) se suelen representar con la longitud característica como subíndice, esto no se hace con el número de Prandtl que como se ve en la ecuación (1-30) depende sólo de las características del fluido y del flujo (esto a través de la dependencia de los parámetros con las condiciones del flujo).

Los valores del número de Prandtl van desde menos de 0,01 para los metales líquidos (por ejemplo 0,0196 para el mercurio) hasta más de 100000 para algunos aceites pesados (por ejemplo en torno a 3400 para un aceite de motor típico). Pr es del orden de 10 para el agua. Para los gases el número de Prandtl Pr apenas depende de la temperatura y su valor es en torno a 1, lo que indica que tanto la cantidad de movimiento como de calor se difunden por el fluido a una velocidad similar. En particular, en el caso concreto del aire puede tomarse en la práctica aproximadamente $Pr = 0,7$.

El calor se difunde con mucha rapidez en los metales líquidos ($Pr \ll 1$) y con mucha lentitud en los aceites ($Pr \gg 1$) en relación con la cantidad de movimiento. Valores bajos del número de Prandtl se corresponden con mayor transferencia del calor por conducción (Para valores pequeños el calor se difunde mucho más rápidamente comparado con la difusión de la cantidad de movimiento y el espesor de la capa límite térmica es mucho mayor que el de la capa límite hidrodinámica) y valores altos van asociados a una mayor transferencia del calor por convección.

Esto indica que la capa límite térmica es mucho más gruesa para los metales líquidos y mucho más delgada para los aceites, en relación con la capa límite de velocidad. Cuanto más gruesa sea la capa límite térmica con mayor rapidez se difundirá el calor en el fluido. El número de Prandtl se emplea tanto en convección forzada como natural.

Dependiendo del tipo de flujo (laminar o turbulento) y de la geometría de las superficies se utilizan distintas expresiones para el número de Nusselt [2, 9]. Así, para superficies planas en régimen laminar se utiliza para el número de Nusselt promedio una expresión de la forma

$$\overline{Nu}_L = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad (1-31)$$

válida en el rango $Re < 5 \times 10^5$ para una superficie isoterma. Para una superficie plana en régimen turbulento desde prácticamente el principio, se utiliza para el número de Nusselt promedio la expresión

$$\overline{Nu}_L = 0,037 Re_L^{4/5} Pr^{1/3} \quad (1-32)$$

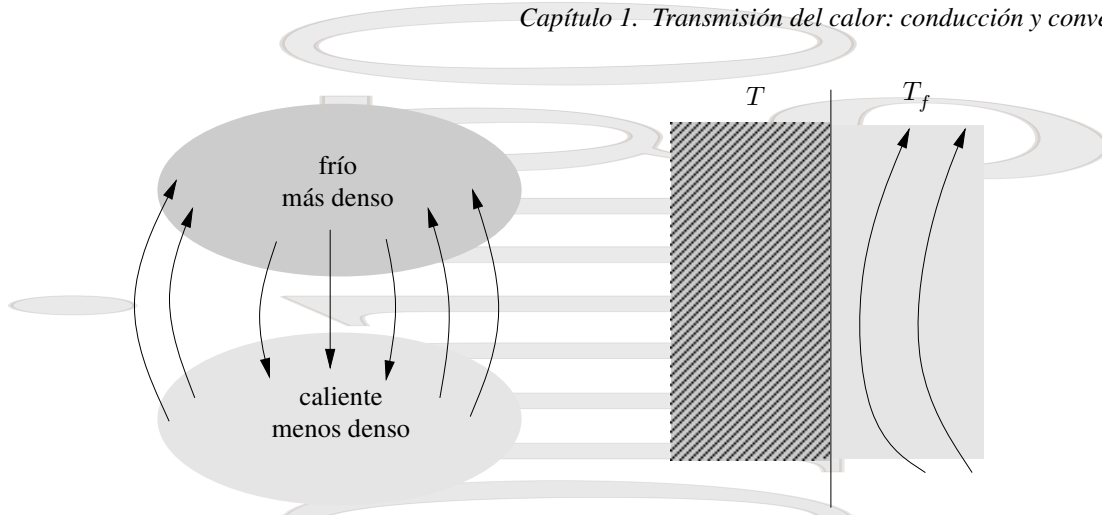


Figura 1-4: La convección natural tiene lugar a consecuencia de las distintas densidades del aire caliente y frío. El aire frío, más denso, desplaza al aire caliente cuando éste último está en las capas más bajas. Este mismo proceso también tiene lugar en la superficie de un muro en contacto con un fluido a distinta temperatura, produciéndose intercambio de calor por convección.

válida en el rango $5 \times 10^5 < Re < 10^7$. A menudo la lámina es lo suficientemente grande para que se tenga una combinación de flujo laminar y turbulento. En este caso,

$$\overline{Nu}_L = (0,037 Re_L^{4/5} - 871) Pr^{1/3} \quad (1-33)$$

válida en el rango $5 \times 10^5 < Re < 10^7$ para una superficie isoterma a temperatura T_S . Cuando las propiedades del fluido no pueden considerarse constantes en el flujo éstas se suelen evaluar a la denominada *temperatura de película* que se define como la media aritmética entre la temperatura de la pared T_S y la temperatura del flujo libre T_∞ ,

$$T_f = \frac{T_S + T_\infty}{2}. \quad (1-34)$$

Una expresión utilizada para convección forzada en el interior de una tubería cilíndrica lisa con flujo turbulento completamente desarrollado ($0,6 < Pr < 100$ y $2500 < Re < 1,25 \times 10^5$) es la siguiente,

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n \quad (1-35)$$

donde el coeficiente del número de Prandtl tiene los valores $n = 0,4$ cuando el fluido se está calentando y $n = 0,3$ cuando se está enfriando y donde los números de Reynolds y Nusselt se calculan con el diámetro interno de la tubería D como longitud característica.

1.5.2. Convección libre o natural.

En convección libre se observa que, para distintas superficies isotermas, el número de Nusselt puede ajustarse experimentalmente en distintas regiones mediante una expresión de la forma

$$Nu = cte(GrPr)^n, \quad (1-36)$$

donde cte y n están tabuladas para distintos rangos y geometrías[2] y Gr es el *número de Grashoff* que se define como

$$Gr = \frac{g\alpha_v(T_S - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (1-37)$$

donde α_v es el coeficiente de dilatación de volumen, T_S la temperatura de la superficie y T_∞ la temperatura del fluido alejado de la superficie. El número de Grashoff desempeña en convección libre un papel similar al que realiza en convección forzada el número de Reynolds. En concreto, representa la relación entre las fuerzas de flotabilidad o empuje y las fuerzas viscosas en la corriente de convección natural y es la variable principal utilizada como criterio de la transición de capa límite laminar a turbulenta en convección natural.

Se denomina *número de Rayleigh* al producto de los números de Grashoff Gr y Prandtl Pr

$$Ra = Gr Pr = \frac{g \alpha_v \Delta T L^3 \rho^2}{\mu \lambda} \quad (1-38)$$

que aparecen en la ecuación (1-36), y también se utiliza para caracterizar la transición de régimen laminar a turbulento en convección libre. Por ejemplo, el flujo pasa a ser turbulento para $Ra > 10^9$.

En un modelo más elaborado debido a Churchill y Chu[10] válido para un mayor rango más amplio de números de Rayleigh la evaluación de la transmisión de calor por convección tiene una forma más compleja que la expresión (1-36). Así, para régimen laminar en una superficie plana vertical[†] el número de Nusselt tiene la forma

$$\overline{Nu}_L = 0,68 + \frac{0,67 Ra_L^{1/4}}{[1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{4/9}}, \quad (1-39)$$

expresión válida para $0 < Ra_L < 10^9$, mientras que cuando se tiene una combinación de regímenes laminar y turbulento en la misma superficie plana vertical, se utiliza para el número de Nusselt la expresión

$$\overline{Nu}_L = \left\{ 0,825 + \frac{0,387 Ra_L^{1/6}}{[1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2, \quad (1-40)$$

válida para $10^{-1} < Ra_L < 10^{12}$. También se obtienen expresiones para el número de Nusselt en convección libre en cilindros horizontales largos (con el diámetro del cilindro como longitud característica),

$$Nu_D = \left\{ 0,60 + \frac{0,387 Ra_D^{1/6}}{[1 + (0,559/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2, \quad (1-41)$$

expresión válida para $10^{-5} < Ra_D < 10^{13}$, en la que ahora la longitud característica es el diámetro del cilindro D . Para una superficie esférica, donde la longitud característica es también el diámetro D de la esfera, queda

$$Nu_D = 2 + \frac{0,589 Ra_D^{1/4}}{[1 + (0,469/Pr)^{9/16}]^{4/9}}. \quad (1-42)$$

para el rango $Ra < 10^{11}$ y $Pr > 0,5$. Las propiedades que aparecen directamente o indirectamente en las ecuaciones anteriores se evalúan a la temperatura de película (1-34).

En un modelo simplificado para convección natural entre el aire y varias superficies[2, 9] se obtienen unos valores del coeficiente de convección que se muestran en la tabla 1-4.

1.5.3. Convección con cambio de fase.

En los casos de convección que acabamos de estudiar, los fluidos que intervienen siempre permanecen en la misma fase a pesar de los cambios de temperatura que experimentan. Sin embargo, en determinadas sustancias es posible que debido a los cambios de temperatura que tienen lugar durante el proceso se produzca una transición de fase con un intercambio de calor, que hay que tener en cuenta a la hora de calcular el flujo de energía con la superficie. Cuando los procesos de convección tienen lugar junto a un cambio de fase, como ocurre en los procesos de convección asociados a la condensación o a la ebullición se producen unos intercambios de calor muy importantes, incluso más intensos que en la convección forzada.

[†]En este caso, la longitud característica L que se utiliza en las definiciones de los números de Grashoff, Nusselt y Rayleigh es la altura de la superficie, simbolizada por el subíndice L .

Tabla 1-4: Valores del coeficiente de convección en un modelo simplificado de convección natural del aire[2, 9] a una temperatura media de 21°C. h es el coeficiente de convección en unidades de $\text{W/m}^2\text{°C}$, ΔT la diferencia de temperaturas en grados centígrados entre la superficie y un punto del aire suficientemente alejado de la misma, L la dimensión vertical u horizontal en metros y D el diámetro también en metros, según corresponda.

Superficie	Laminar $10^4 < Ra < 10^9$	Turbulento $Ra > 10^9$
Plano o cilindro vertical	$h = 1,42 \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{1/4}$	$h = 1,31(\Delta T)^{1/3}$
Cilindro horizontal	$h = 1,32 \left(\frac{\Delta T}{D} \right)^{1/4}$	$h = 1,24(\Delta T)^{1/3}$
Placa horizontal caliente mirando hacia arriba o placa fría mirando hacia abajo (la gravedad contribuye al movimiento)	$h = 1,32 \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{1/4}$	$h = 1,52(\Delta T)^{1/3}$
Placa horizontal caliente mirando hacia abajo o placa fría mirando hacia arriba (la gravedad no contribuye al movimiento)	$h = 0,59 \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{1/4}$	

1.6. Casos particulares de conducción y convección en régimen permanente.

1.6.1. Transmisión del calor por conducción y convección a través de muros de paredes planas.

Muro simple de paredes planas con condiciones de contorno de primera especie (Temperatura conocida en las superficies delimitadoras).

Consideramos ahora el caso de una pared homogénea e isotrópica de espesor b y área A , con una conductividad térmica λ uniforme y constante. Las superficies externas se mantienen a las temperaturas constantes T_1 y T_2 (con $T_1 > T_2$) y en el problema a estudiar no hay fuentes internas de calor. Así, éste es un problema unidimensional,

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

y, como en un régimen permanente (estacionario) las temperaturas T_1 y T_2 son constantes:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 = \alpha \nabla^2 T + \frac{q_v}{c\rho} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

que, teniendo en cuenta que $T = T(x)$ nos da, finalmente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \text{cte} = C_1 \Rightarrow T = C_1 x + C_2 \quad (1-43)$$

Si imponemos la condición de contorno $T = T_1$ para $x = 0$, se tiene que $T_1 = C_2$, e imponiendo además la condición de contorno $T = T_2$ para $x = b$, se tiene que:

$$T_2 = C_1 b + T_1 \Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{b}$$

quedando finalmente la distribución de temperaturas en el interior del muro simple:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{b} x + T_1 \quad (1-44)$$

que como vemos sigue una ley lineal. La densidad de flujo que circula a través del muro será $q = -\frac{\lambda}{b}(T_2 - T_1)$ y el flujo térmico elemental transmitido vendrá dado por:

$$d\Phi = q dS = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dS = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{b} dS = -\frac{\lambda}{b}(T_2 - T_1) dS$$

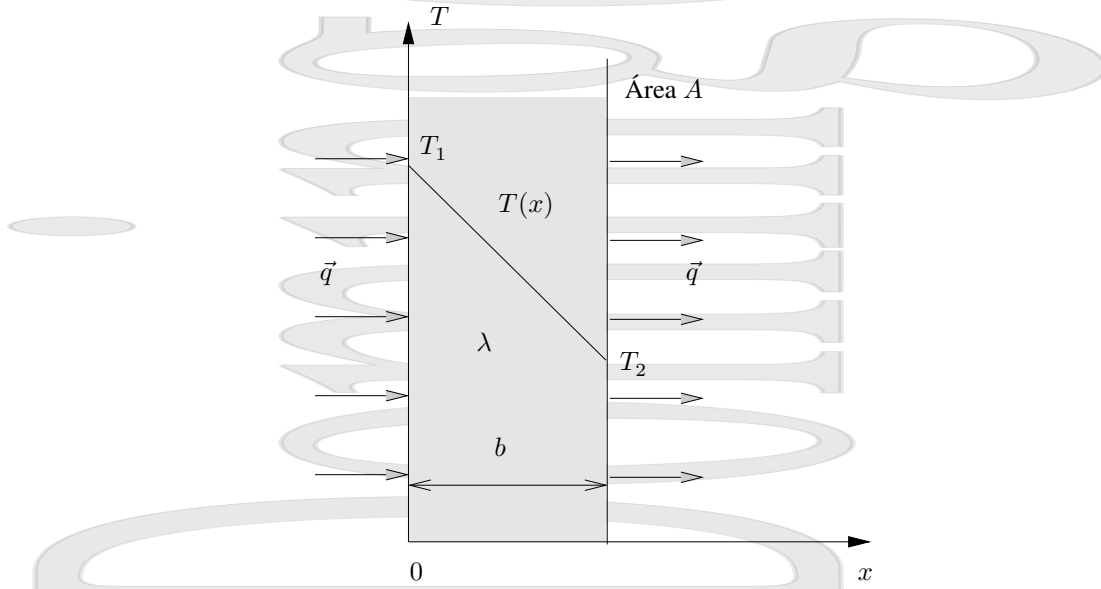


Figura 1-5: Conducción del calor en una dimensión a través de un muro simple homogéneo. La temperatura varía en el interior del muro de forma lineal entre los valores T_1 y T_2 de las dos superficies externas del muro.

siendo el flujo total

$$\Phi = \int_0^\Phi d\Phi = \int_A -\lambda \frac{T_2 - T_1}{b} dS = \Phi = \frac{\lambda}{b} (T_1 - T_2) S$$

y la densidad de flujo q

$$q = \frac{\Phi}{S} = \frac{\lambda}{b} (T_1 - T_2) \quad (1-45)$$

Muro compuesto de paredes planas con condiciones de contorno de primera especie.

En régimen permanente o estacionario, la densidad de flujo (flujo transmitido por unidad de superficie) es la misma para todos y cada uno de los muros simples que forman el muro compuesto. En caso de que no fuera así, en alguno de ellos habría acumulación o cesión neta de calor y no estaríamos en régimen permanente ya que se tendría variación de T . Si tomamos por ejemplo $T_1 > T_{n+1}$ se tiene, para cada muro,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{S} &= \frac{\lambda_1}{b_1} (T_1 - T_2) \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{b_1}{\lambda_1} \frac{\Phi}{S} \\ &\vdots \\ \frac{\Phi}{S} &= \frac{\lambda_n}{b_n} (T_n - T_{n+1}) \Rightarrow T_n - T_{n+1} = \frac{b_n}{\lambda_n} \frac{\Phi}{S} \end{aligned}$$

Sumando estas expresiones, se tiene:

$$T_1 - T_{n+1} = \sum_i \frac{b_i}{\lambda_i} \frac{\Phi}{S} = \frac{\Phi}{S} \sum_i \frac{b_i}{\lambda_i} \quad (1-46)$$

quedando, para la densidad de flujo calorífico:

$$q = \frac{\Phi}{S} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_i \frac{b_i}{\lambda_i}} = \bar{U}_c (T_1 - T_{n+1}) = \frac{1}{R_c} (T_1 - T_{n+1}) \quad (1-47)$$

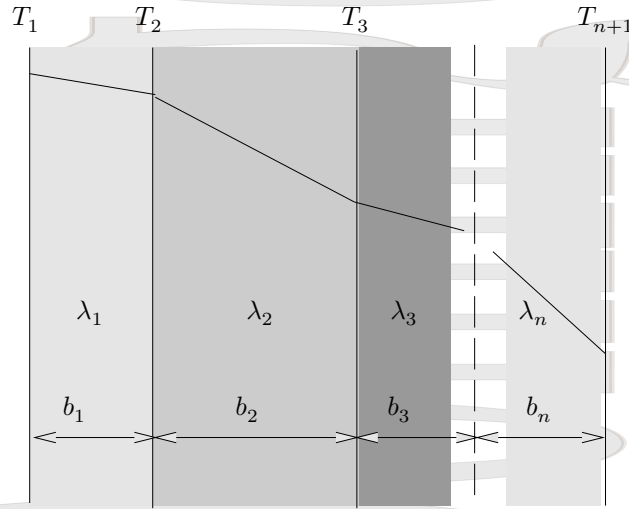


Figura 1-6: Conducción del calor en una dimensión a través de un muro compuesto. La temperatura varía linealmente dentro de cada muro homogéneo entre los valores en sus dos superficies, con una pendiente distinta en cada muro dependiendo de su espesor y de su conductividad térmica.

donde se denomina $R_c = \sum b_i/\lambda_i$ a la *resistencia térmica global* a la conducción del calor y $\bar{U}_c = R_c^{-1}$ al *coeficiente global de conducción*. Se denomina también a éste *coeficiente de transmisión del calor superficie-superficie* o *conductancia*.

Condiciones de contorno de tercera especie para los muros simple y compuesto de paredes planas (Paredes planas con conducción y convección.)

Consideremos una pared plana que separa dos fluidos en movimiento. Conozcamos T_{f_1} , T_{f_2} , h_1 , h_2 , λ y b que además de conocidas son constantes, y queremos conocer la cantidad de calor que fluye desde el fluido caliente al frío, así como las temperaturas en las caras de la pared. La densidad de flujo térmico entre el fluido caliente y la pared viene dada por la ley de enfriamiento de Newton:

$$q = \frac{\Phi}{S} = h_1(T_{f_1} - T_{S_1}) \Rightarrow T_{f_1} - T_{S_1} = \frac{q}{h_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\Phi}{S}$$

En régimen estacionario, por conducción a través de la pared se transmitirá ese mismo flujo térmico por unidad de superficie

$$q = \frac{\lambda}{b}(T_{S_1} - T_{S_2}) \Rightarrow T_{S_1} - T_{S_2} = \frac{b}{\lambda} q$$

así como desde la superficie S_2 al fluido frío

$$q = h_2(T_{S_2} - T_{f_2}) \Rightarrow T_{S_2} - T_{f_2} = \frac{q}{h_2}$$

Sumando todas estas expresiones, se tiene:

$$T_{f_1} - T_{f_2} = q \left(\frac{1}{h_1} + \frac{b}{\lambda} + \frac{1}{h_2} \right) \quad (1-48)$$

que se puede escribir como:

$$q = \frac{\Phi}{S} = \bar{U}_t(T_{f_1} - T_{f_2}) \quad (1-49)$$

donde \bar{U}_t es el *coeficiente global de transmisión del calor* o *transmitancia* y su inversa

$$R_t = \frac{1}{\bar{U}_t} = \left(\frac{1}{h_1} + \frac{b}{\lambda} + \frac{1}{h_2} \right) \quad (1-50)$$

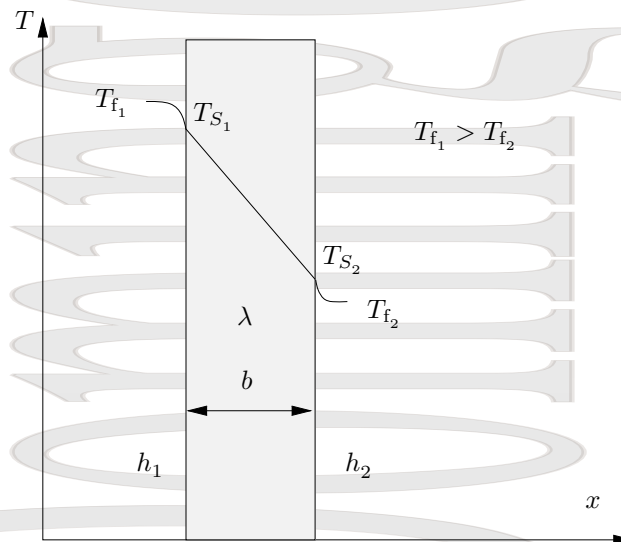


Figura 1-7: Condiciones de contorno de tercera especie para un muro simple. La temperatura tiene una dependencia lineal en el interior del muro y cambia bruscamente al llegar al exterior debido a la convección, hasta que se iguala a la temperatura del exterior.

la *resistencia térmica total* del sistema al paso del calor, $R_t = 1/\bar{U}_t = R_1 + R_c + R_2$, donde:

$R_1 = \frac{1}{h_1}$ es la resistencia térmica a la transmisión del calor desde el fluido caliente a la pared.

$R_c = \frac{b}{\lambda}$ es la resistencia térmica a la transmisión del calor por conducción dentro del muro.

$R_2 = \frac{1}{h_2}$ es la resistencia térmica a la transmisión del calor desde la pared al fluido frío.

Es frecuente hablar de estos coeficientes globales de transmisión del calor como *coeficientes aire-aire* ya que incluyen todo lo que hay entre el aire de un lado y el aire del otro. Para un muro plano compuesto, la *resistencia térmica a la transmisión del calor* (o *resistencia térmica aire-aire*) del mismo toma la forma

$$R_t = \frac{1}{\bar{U}_t} = \frac{1}{h_1} + \sum_i \frac{b_i}{\lambda_i} + \frac{1}{h_2} \quad (1-51)$$

Este resultado es muy similar al que se obtiene para el caso de las resistencias eléctricas en serie, salvo que con la resistencia térmica en la forma en que la hemos definido, y que es la que se utiliza habitualmente en transmisión del calor a través de muros, la relación es entre la diferencia de temperaturas y el módulo de la densidad de flujo \vec{q} , en la forma $\Delta T = R_t q$, lo que da lugar a la aparición de una superficie cuando lo que se relaciona es la diferencia de temperaturas y el flujo en la forma $\Delta T = R_t \Phi / S$, que es lo que se hace habitualmente en otros campos fuera de la construcción.

Por ejemplo, en electrónica, cuando se calcula la resistencia térmica de los disipadores utilizados, la resistencia térmica \mathcal{R}_{tel} de un elemento sencillo se define a partir de

$$\Delta T = \Phi \mathcal{R}_{tel}$$

Cuando la resistencia térmica se define de esta forma se le denomina *resistencia térmica absoluta* \mathcal{R}_A [K/W] y para esta resistencia térmica absoluta[†] se satisfacen las relaciones habituales de combinaciones de resistencias en serie y paralelo.

[†]En algunos libros anglosajones se utiliza el nombre resistencia térmica para esta resistencia térmica absoluta mientras que se denomina valor- R a la resistencia térmica habitual en construcción, a la que aquí denominamos resistencia térmica. Deben vigilarse las unidades.

Por el contrario, el factor superficie que aparece en $\Delta T = R_t \Phi / S$ hace que, cuando se trata el caso de sistemas en los que se produce un flujo en paralelo, la relación habitual de resistencias eléctricas en paralelo no se cumpla para las resistencias térmicas R definidas de esta forma, que recordemos, es la habitual en construcción.

La *resistencia térmica absoluta* \mathcal{R}_A a la transmisión del calor en esta pared plana compuesta queda como

$$\mathcal{R}_A = \frac{R_t}{S} = \frac{1}{S} \left[\frac{1}{h_1} + \sum_i \frac{b_i}{\lambda_i} + \frac{1}{h_2} \right] \quad (1-52)$$

de forma que se cumple $T_i - T_e = \mathcal{R}_A \Phi$. Si además definimos las resistencias absolutas a la conducción

$$\mathcal{R}_{A_C} = \frac{R_{t_C}}{S} = \frac{1}{S} \sum_i \frac{b_i}{\lambda_i} \quad (1-53)$$

y a la transmisión superficial del calor,

$$\mathcal{R}_{A_h} = \frac{R_{t_h}}{S} = \frac{1}{Sh} \quad (1-54)$$

con

$$\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_{A_{h_1}} + \mathcal{R}_{A_C} + \mathcal{R}_{A_{h_2}}$$

la analogía con las resistencias eléctricas es completa de forma que se cumple $T_i - T_e = \mathcal{R}_A \Phi$ y se pueden combinar en serie y en paralelo como ellas.

Hay que insistir en el hecho de que en construcción la resistencia térmica que se utiliza habitualmente no es esta resistencia térmica absoluta, ya que al estimar la bondad de un elemento de un cerramiento frente a otros se estima el comportamiento frente al flujo de calor por unidad de superficie (densidad de flujo) y no frente al flujo total de calor. Por este motivo, debe tenerse especial cuidado con los datos que se suministran, observando atentamente las unidades.

1.6.2. Transmisión del calor por conducción y convección a través de paredes cilíndricas.

Condiciones de contorno de primera especie en una pared cilíndrica simple.

Veamos ahora como tratar el problema de la conducción de calor a través de una pared cilíndrica en régimen permanente. Ahora no es posible hacer una extensión directa de lo que se ha visto para el caso de una pared plana salvo que el espesor de la pared sea mucho menor que su radio, ya que las áreas de las caras interna y externa son distintas. Esto hace que, aunque el flujo térmico (energía transmitida por unidad de tiempo) a través de ambas paredes sea el mismo, no lo sea la densidad de flujo (flujo por unidad de superficie). Sin embargo, si consideramos un tubo cilíndrico de radio r y espesor infinitesimal dr dentro de la pared cilíndrica, como el que se muestra en la figura 1-8, sí es posible considerar las superficies interna y externa como prácticamente similares, y por tanto $q_i \simeq q_e$, de forme que en una buena aproximación es posible aplicar entre ellas la ley de Fourier en la forma

$$\vec{q} = \frac{d\Phi}{dS} \vec{u}_r = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$$

donde en la última expresión ya se ha tenido en cuenta que debido a la simetría cilíndrica del problema la única dependencia de la temperatura es con la distancia r al eje del cilindro. El área total es $S = 2\pi r L$, siendo L la longitud del cilindro, y el flujo térmico total a través de la pared cilíndrica es Φ , quedando:

$$\frac{\Phi}{S} = q_r = -\lambda \frac{dT}{dr} \Rightarrow \frac{\Phi}{2\pi r L} dr = -\lambda dT, \quad (1-55)$$

El flujo térmico es el mismo para las dos superficies y, por tanto, al integrar en r y T entre una de las superficies con temperaturas conocidas y la superficie cilíndrica interior se tiene

$$T(r) = T_1 - \frac{\Phi}{2\pi \lambda L} \ln \frac{r}{r_1} = T_2 - \frac{\Phi}{2\pi \lambda L} \ln \frac{r}{r_2} \quad (1-56)$$

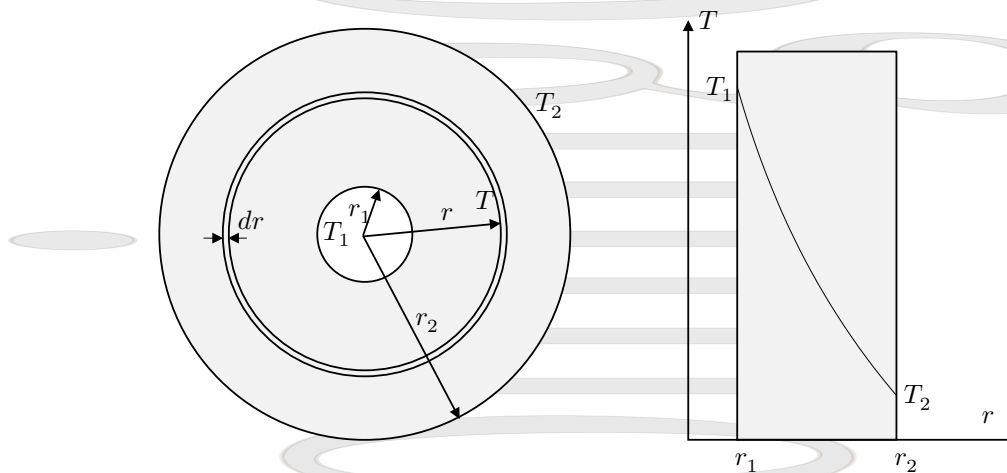


Figura 1-8: Conducción a través de un cilindro de una pared simple.

que nos da una distribución logarítmica en función del radio para la temperatura en el interior de la capa cilíndrica (en vez de la distribución lineal que obtuvimos en el caso de una pared plana). Como conocemos las temperaturas en las superficies interior y exterior, podemos obtener la relación entre éstas, las características de la pared cilíndrica y el flujo[†]

$$-\frac{\Phi}{2\pi\lambda L} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = (T_2 - T_1). \quad (1-57)$$

Es decir, la diferencia de temperaturas entre las caras interior y exterior del cilindro viene dada por:

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_2}{r_1} = \left[\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \frac{\Phi}{L} = R_{Lc} \frac{\Phi}{L} = \frac{1}{U_{Lc}} \frac{\Phi}{L} \quad (1-58)$$

donde

$$R_{Lc} = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (1-59)$$

es la *resistencia térmica lineal a la conducción* o *resistencia térmica lineal superficie-superficie* para la pared cilíndrica simple y $U_{Lc} = R_{Lc}^{-1}$ el *coeficiente lineal de conducción* o *coeficiente lineal de transmisión del calor superficie-superficie* para dicha pared cilíndrica simple.

Este mismo resultado podría haberse obtenido a partir de la ecuación de Laplace (1-18) expresada en coordenadas cilíndricas,

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (1-60)$$

que, dado que no hay dependencia ni en θ ni en z se convierte en

$$\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2} = 0. \quad (1-61)$$

Para ello habría sido necesario resolver esta ecuación diferencial en derivadas parciales utilizando la variable intermedia dT/dr . Puede comprobarse que una función del tipo $T(r) = A \ln Br$, con A y B dos constantes, es una solución genérica de la ecuación diferencial (1-61) con dos variables independientes, como corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden.

Condiciones de primera especie en paredes cilíndricas compuestas.

Si en vez de tenerse una única capa cilíndrica como en el apartado anterior, se tiene una pared cilíndrica de distintas capas, todas ellas cilíndricas, como la que se muestra en la figura 1-9, es fácil obtener la relación entre las distintas

[†] Nótese que en las ecuaciones (1-56) y (1-57) el flujo es positivo si tiene lugar en la dirección radial positiva y negativo en caso contrario.

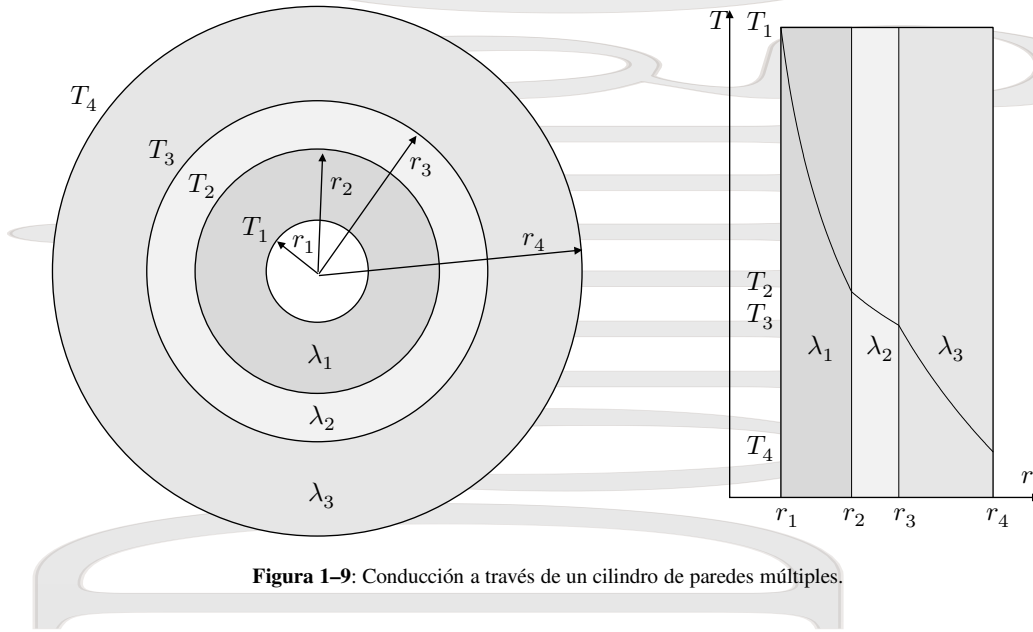


Figura 1-9: Conducción a través de un cilindro de paredes múltiples.

conductividades térmicas, los radios interior y exterior del cilindro compuesto y las temperaturas en las superficies externa e interna. Si r_i son los radios internos de cada capa, T_i sus temperaturas, y λ_i sus conductividades térmicas se tiene, para cada una de las distintas capas cilíndricas,

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1 L} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$T_2 - T_3 = \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2 L} \ln \frac{r_3}{r_2}$$

$$\vdots$$

$$T_{n-1} - T_n = \frac{\Phi}{2\pi\lambda_{n-1} L} \ln \frac{r_n}{r_{n-1}}$$

$$T_n - T_{n+1} = \frac{\Phi}{2\pi\lambda_n L} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n}$$

Ahora bien, en régimen permanente el flujo térmico Φ es el mismo para todas las capas, por lo que al restar y sacar factor común queda la expresión

$$T_1 - T_{n+1} = T_{\text{int}}^{\text{sup}} - T_{\text{ext}}^{\text{sup}} = \left[\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n} \right) \right] \frac{\Phi}{L}$$

que en forma más esquemática puede escribirse como

$$T_1 - T_{n+1} = \left[\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) \right] \frac{\Phi}{L} = R_{LC} \frac{\Phi}{L} = \frac{1}{U_{LC}} \frac{\Phi}{L} \quad (1-62)$$

donde R_{LC} es la *resistencia térmica lineal global a la conducción* o *resistencia térmica lineal global superficie-superficie* para la pared cilíndrica compuesta y $U_{LC} = R_{LC}^{-1}$ el *coeficiente lineal global de conducción* o *coeficiente lineal global de transmisión del calor superficie-superficie* para dicha pared cilíndrica compuesta.

La *resistencia térmica absoluta* \mathcal{R}_A [K/W] a la conducción del calor en esta pared cilíndrica simple queda como

$$\mathcal{R}_A = \frac{1}{2\pi L} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \quad (1-63)$$

de forma que se cumple $T_i - T_e = \mathcal{R}_A \Phi$.

Paredes cilíndricas compuestas con conducción y convección.

El caso más frecuente no es conocer de forma exacta las temperaturas en las paredes interior y exterior del cilindro, sino conocer solamente las temperaturas T_i y T_e en los medios interior y exterior. Entre estos fluidos interior y exterior y las respectivas paredes, el calor se transmite básicamente por convección, de acuerdo con la fórmula de Newton (1-24). Estas relaciones deben ser añadidas a las que se acaban de ver para el caso de la pared cilíndrica compuesta, quedando

$$\begin{aligned} T_i - T_1 &= \frac{1}{h_i} \frac{\Phi}{2\pi r_1} \\ T_1 - T_2 &= \frac{\Phi}{2\pi \lambda_1 L} \ln \frac{r_2}{r_1} \\ T_2 - T_3 &= \frac{\Phi}{2\pi \lambda_2 L} \ln \frac{r_3}{r_2} \\ &\vdots \\ T_n - T_{n-1} &= \frac{\Phi}{2\pi \lambda_{n-1} L} \ln \frac{r_n}{r_{n-1}} \\ T_{n+1} - T_n &= \frac{\Phi}{2\pi \lambda_n L} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n} \\ T_{n+1} - T_e &= \frac{1}{h_e} \frac{\Phi}{2\pi r_{n+1}} \end{aligned}$$

donde h_i y h_e son los coeficientes de convección en las paredes interna y externa, respectivamente. Sumando todas estas expresiones se obtiene

$$T_i - T_e = \frac{\Phi}{L} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{h_i r_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n} + \frac{1}{h_e r_{n+1}} \right\}$$

que de forma más resumida puede escribirse en la forma

$$T_i - T_e = \frac{\Phi}{L} \left[\frac{1}{2\pi h_i r_1} + \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) + \frac{1}{2\pi h_e r_{n+1}} \right]. \quad (1-64)$$

Esto puede escribirse como el flujo térmico por unidad de longitud en la forma

$$\frac{\Phi}{L} = U_L (T_i - T_e), \quad (1-65)$$

donde

$$U_L = \left[\frac{1}{2\pi h_i r_1} + \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) + \frac{1}{2\pi h_e r_{n+1}} \right]^{-1} \quad (1-66)$$

es el *coeficiente lineal global de transmisión del calor* o *coeficiente lineal de transmisión del calor aire-aire* y su inversa

$$R_L = \frac{1}{2\pi h_i r_1} + \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) + \frac{1}{2\pi h_e r_{n+1}} \quad (1-67)$$

la *resistencia térmica lineal global a la transmisión del calor* o *resistencia térmica lineal aire-aire* para la pared cilíndrica en estas condiciones.

La *resistencia térmica absoluta* \mathcal{R}_A [K/W] a la transmisión del calor en esta pared cilíndrica compuesta queda como

$$\mathcal{R}_A = \frac{1}{2\pi L} \left[\frac{1}{h_i r_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{h_e r_{n+1}} \right] \quad (1-68)$$

de forma que se cumple $T_i - T_e = \mathcal{R}_A \Phi$.

1.6.3. Transmisión del calor por conducción y convección a través de paredes esféricas.

Condiciones de contorno de primera especie en una pared esférica simple.

Consideremos ahora el caso de una pared esférica de un material de conductividad térmica λ de radio interno r_1 y radio externo r_2 , con paredes isotermas 1 y 2 respectivamente a temperaturas T_1 y T_2 que permanecen constantes, de forma que se produce un flujo de calor en régimen permanente. Dada la simetría del problema, en estas condiciones el flujo térmico en este sistema debe ser radial y las superficies isotermas esferas concéntricas entre sí y con la pared esférica, de forma que la temperatura depende únicamente de la distancia al centro de las esferas $T = T(r)$.

Mediante un procedimiento similar al utilizado para obtener (1-55) para la pared cilíndrica simple, pero aplicado a una pared esférica de espesor infinitesimal dr y radio interno r se obtiene

$$\frac{\Phi}{S} = q_r = -\lambda \frac{dT}{dr} \Rightarrow \frac{\Phi}{4\pi r^2} dr = -\lambda dT, \quad (1-69)$$

con una superficie $4\pi r^2$ de dicha pared. En régimen permanente el flujo Φ a través de cualquier superficie esférica concéntrica es el mismo, por lo que integrando esta expresión entre las superficies interior y exterior de la pared esférica se obtiene

$$-\frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} \frac{\Phi}{4\pi\lambda} = -T \Big|_{T_1}^{T_2},$$

que, sustituyendo los límites y reordenando da un flujo entre ambas superficies

$$\Phi = 4\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{T_1 - T_2}{\mathcal{R}_A}, \quad (1-70)$$

donde \mathcal{R}_A [K/W] es la *resistencia térmica absoluta* a la conducción del calor para esta pared esférica simple,

$$\mathcal{R}_A = \frac{1}{4\pi\lambda} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]. \quad (1-71)$$

Si hubiéramos integrado entre una de las superficies interior o exterior y la superficie intermedia habríamos obtenido la distribución de temperaturas

$$T(r) = T_1 + \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right] \frac{\Phi}{4\pi\lambda} = T_2 + \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right] \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \quad (1-72)$$

Estos resultados también pueden obtenerse a partir de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1-73)$$

que, para una distribución radial de temperaturas (sin dependencia angular), queda en la forma

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (1-74)$$

al ser $T = T(r)$. Esta expresión se puede simplificar a

$$r^2 \frac{dT}{dr} = \text{cte},$$

que puede integrarse fácilmente dando

$$T(r) = -\frac{A}{r} + B$$

en función de dos constantes de integración A y B que se obtienen a partir de las condiciones de contorno en las superficies interior y exterior $T(r_1) = T_1$ y $T(r_2) = T_2$ de forma que, junto al flujo dado por la ley de Fourier (1-7), se obtienen las expresiones (1-70) y (1-72).

Conducción y convección en una pared esférica simple.

Consideremos ahora el caso en el que la pared esférica anterior de radio interior r_1 (a temperatura T_1) y radio exterior r_2 (a temperatura T_2) está en contacto con dos fluidos de temperatura conocida, T_i en el interior y T_e en el exterior, con los que intercambia calor de forma que los coeficientes superficiales de transmisión del calor son h_i y h_e respectivamente. En estas condiciones, el intercambio de calor con ambos fluidos en el interior y en el exterior satisface las leyes

$$q_i = \frac{\Phi}{4\pi r_1^2} = h_i(T_i - T_1)$$

$$q_e = \frac{\Phi}{4\pi r_2^2} = h_e(T_2 - T_e)$$

de forma que si, como ocurre en régimen permanente, el flujo Φ a través de las distintas superficies esféricas concéntricas es el mismo, se cumple

$$T_i - T_1 = \frac{\Phi}{4\pi r_1^2 h_i}$$

$$T_1 - T_2 = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \frac{\Phi}{4\pi \lambda}$$

$$T_2 - T_e = \frac{\Phi}{4\pi r_2^2 h_e}$$

que al sumar da

$$T_i - T_e = \left[\frac{1}{h_i r_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{h_e r_2^2} \right] \frac{\Phi}{4\pi} = \mathcal{R}_A \Phi \quad (1-75)$$

donde \mathcal{R}_A [K/W] es la *resistencia térmica absoluta* a la transmisión del calor para esta pared esférica simple

$$\mathcal{R}_A = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{h_i r_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{h_e r_2^2} \right] \quad (1-76)$$

Conducción y convección en una pared esférica compuesta.

Análogamente a cómo se hizo para las paredes compuestas planas o cilíndricas, también pueden obtenerse las expresiones en régimen permanente para una pared esférica compuesta de n capas concéntricas de radios límite r_1, \dots, r_{n+1} en la que además actúa la convección, quedando

$$T_i - T_e = \left[\frac{1}{h_i r_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right) + \frac{1}{h_e r_{n+1}^2} \right] \frac{\Phi}{4\pi} = \mathcal{R}_A \Phi \quad (1-77)$$

donde \mathcal{R}_A [K/W] es la *resistencia térmica absoluta* a la transmisión del calor para este sistema

$$\mathcal{R}_A = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{h_i r_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right) + \frac{1}{h_e r_{n+1}^2} \right] \quad (1-78)$$

que cumple $T_i - T_e = \mathcal{R}_A \Phi$.

Conducción y convección en una pared esférica fina.

En buena parte de los casos prácticos (por ejemplo, lucernarios esféricos) el espesor de la pared esférica es pequeño comparado con el radio de la misma. En estas condiciones las dos superficies externas de la pared tienen áreas similares y en la práctica se pueden tratar con un error pequeño como una pared plana de área el valor para el radio medio y los coeficientes de transmisión superficial del calor adecuados. De esta forma, el cálculo se simplifica enormemente.

Capítulo 2

Fenómenos de transporte: procesos de difusión.

2.1. Conceptos fundamentales y leyes.

Muchos procesos de transferencia de calor que se encuentran en la naturaleza vienen acompañados por procesos de transferencia de masa de un componente a través del otro. Esto se tiene, por ejemplo, en la condensación del vapor procedente de una mezcla gas-vapor y en la evaporación de un líquido en una mezcla gas-vapor. El líquido evaporado se distribuye por la mezcla gas-vapor por difusión, viniendo acompañado este proceso de un cambio en la naturaleza de la mezcla y de una variación en la intensidad de transferencia de calor, lo que a su vez influye en el proceso de difusión.

Se entiende por *difusión* el proceso espontáneo de extensión o esparcimiento de materia en un medio binario o sistema de dos componentes bajo la influencia de la diferencia de concentración. En una mezcla homogénea en lo referente a la temperatura y la presión, la difusión tiende a homogeneizar las concentraciones en el sistema, viniendo acompañada de transferencia de masa de la región de alta concentración a la región de baja concentración. El flujo de difusión se puede determinar utilizando cualquier manera de especificar la cantidad de materia, como masa de la sustancia disuelta que pasa por unidad de tiempo y de área, como número de moléculas, etc. . .

La difusión está caracterizada por el *flujo de difusión* J de un componente, esto es, por la cantidad de materia que pasa en la unidad de tiempo a través de una superficie dada. Definiremos la *densidad de flujo de difusión* j como un vector cuyo módulo en un punto del flujo es la cantidad de sustancia que pasa por unidad de superficie y de tiempo a través de una superficie elemental perpendicular al flujo en el punto y cuya dirección y sentido son los de la difusión en dicho punto,

$$\vec{j} = \frac{dJ}{dS_n} \vec{u}_n \quad (2-1)$$

y, por tanto:

$$J = \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

quedando, para j uniforme a través de una superficie S plana perpendicular al flujo

$$J = jS$$

Como la sustancia se traslada de los lugares de mayor concentración a los de menor concentración, el signo de la componente del flujo en una dirección será el contrario del que da la derivada de la concentración en esa dirección $\frac{\partial c}{\partial n}$. Si la concentración aumenta de izquierda a derecha, el flujo va hacia la izquierda y viceversa. Además, si la concentración de la solución es uniforme $\frac{\partial c}{\partial n} = 0$, no habrá flujo de difusión. Considerando todo esto, para un sistema estacionario macroscópico de dos componentes, homogéneo en lo que respecta a temperatura y presión, la densidad de flujo de difusión de uno de los componentes (el componente i -ésimo), debido a *difusión molecular*, viene dada por la *Ley de Fick*:

$$j_i = -D \frac{\partial c_i}{\partial n} \quad (2-2)$$

o, en la forma vectorial habitual:

$$\vec{j}_i = -D \vec{\nabla} c_i \quad (2-3)$$

donde

c_i es la concentración local de la sustancia (componente) i -ésima. Puede medirse en masa por unidad de volumen, moles por unidad de volumen, etc...

D es el *coeficiente de difusión molecular* de un componente respecto del otro o, de forma abreviada, el *coeficiente de difusión* [m^2/s].

n es la dirección normal a la superficie que une los puntos con similar concentración del componente.

$\frac{\partial c_i}{\partial n}$ es el *gradiente de concentración* (concentración relativa) que está siempre dirigido hacia el sentido creciente de las concentraciones.

El gradiente de concentraciones es la fuerza motriz que determina la transferencia de materia. Esto es equivalente al caso de la conducción del calor, donde la fuerza motriz que determina la transferencia de energía es el gradiente de temperaturas.

El signo negativo en la ecuación (2-3) indica que el movimiento de masa por difusión tiene lugar, de acuerdo con la ley de Fick, hacia las regiones de menor concentración. A este proceso descrito por la ley de Fick se le denomina *difusión por concentración*.

De acuerdo con consideraciones de la teoría cinética de los gases, el coeficiente de difusión aumenta cuando la temperatura crece, y disminuye cuando la presión aumenta. También depende en cierta medida de las proporciones de la mezcla, pero esta dependencia es pequeña cuando la concentración del componente considerado es pequeña, y es habitualmente ignorada en los cálculos. El coeficiente de difusión es idéntico para los dos componentes que se difunden mutuamente en una mezcla de dos componentes. Sus unidades son [m^2/seg] en el sistema internacional y su valor no depende de la forma en que midamos \vec{j} , siempre que la densidad de flujo de difusión \vec{j} y la concentración c utilicen la misma forma de medir la cantidad de materia.

Al hablar de difusión se ha sobreentendido que ésta tiene lugar en un medio en reposo, de forma que la igualación de las concentraciones es debida exclusivamente al movimiento térmico desordenado de las distintas moléculas. Se supone que el líquido o gas no se mezcla debido a acción exterior alguna que lo ponga en movimiento.

Sin embargo este tipo de mezcla puede aparecer en el fluido por la acción de la fuerza gravitatoria. Si se vierte un líquido más ligero sobre agua, por ejemplo, alcohol, la mezcla se producirá por difusión, pero si se vierte agua sobre alcohol, el agua descenderá como líquido más pesado.

De este modo vemos que es posible, bajo la acción del campo gravitatorio, uniformizar la composición del medio en un proceso acompañado de movimiento del mismo. A este fenómeno se le denomina también *convección*, siendo la igualación de concentración producida por convección más rápida que la producida por difusión. Este fenómeno de convección, en este caso natural, es el que se produce (página 10) cuando se calientan las zonas más bajas del aire, de forma que el aire frío más denso de las zonas altas desplaza al aire caliente más ligero de las zonas bajas y viceversa.

2.2. Difusión del vapor.

Dentro de los procesos de difusión, el problema de la difusión del vapor a través de los cerramientos de las edificaciones tiene una importancia especial, ya que puede provocar en los mismos toda una serie de consecuencias indeseables no previstas.

En el interior de un recinto siempre puede haber diversas fuentes de vapor de agua como el sudor de los ocupantes o el vapor originado en la cocina, el aseo o la limpieza. Si este vapor no sale de alguna forma al exterior puede producirse *condensación superficial* de humedad en la superficie más fría del recinto cuando la temperatura en la misma es igual o inferior a la *temperatura de rocío* del aire en contacto con ella (o lo que es lo mismo, cuando el aire se hace saturante a la temperatura de esa superficie). Para evitarlo es conveniente que los materiales permitan en cierta medida el paso de vapor cuando la tensión de vapor en el interior es mayor que en el exterior. Otras alternativas son ventilar frecuentemente o mantener alguna rejilla abierta al exterior, pero esto es poco práctico en invierno. Además hay que evitar que se produzca *condensación intersticial* en el interior de un cerramiento, que tiene lugar cuando la

temperatura en un punto del mismo es igual o inferior a la temperatura de rocío del aire en dicho punto (o lo que es lo mismo, cuando el aire se hace saturante a dicha temperatura).

La mayoría de los materiales son en mayor o menor medida permeables al agua, y por tanto son además permeables al vapor, pero también se tienen materiales impermeables al agua que por el contrario son permeables al vapor de agua, ya que el vapor puede atravesar intersticios que el agua no puede. El transporte de vapor de agua se realiza bien con el aire en movimiento, o bien por el aire macroscópicamente inmóvil en una difusión por concentración. Ésta es la forma en que el vapor de agua viaja a través de ladrillos y demás materiales permeables, que a su vez, presentan una cierta resistencia al paso de vapor de agua a su través.

2.2.1. La ley de transporte del vapor de agua.

Como en otros procesos de difusión por concentración, el vapor de agua se difunde desde las zonas de mayor concentración a las zonas de menor concentración. En el caso de la difusión de vapor de agua a través de los materiales, en vez de representar la concentración como materia por unidad de volumen, es habitual representar la concentración de vapor de agua a través de la *tensión de vapor* (presión parcial del vapor de agua en el aire). La ley de Fick particularizada a este caso se escribe como

$$\vec{j}_v = -d_v \vec{\nabla} e \quad (2-4)$$

donde \vec{j}_v es la *densidad de flujo de difusión* del vapor de agua (de unidades $[\text{kg}/\text{m}^2\text{s}]$), d_v la *difusividad al vapor* o *permeabilidad al vapor* (unidades: $[\text{kg m}/(\text{N s}) \equiv \text{s}]$) que es una característica del material, y e la tensión de vapor. La difusividad al vapor representa la masa de vapor que atraviesa por unidad de tiempo y superficie una pared plana de espesor unidad entre cuyas caras hay una diferencia de presiones de vapor igual a la unidad. A la inversa de la difusividad al vapor $r_v = 1/d_v$ se le denomina *resistividad al vapor*, y sus unidades son, en el sistema internacional $[\text{N s}/(\text{kg m}) \equiv \text{s}^{-1}]$. La resistividad al vapor también es una característica del material y caracteriza la dificultad que éste opone al paso del vapor de agua a su través.

Para tener unos valores cómodos es frecuente ver en las tablas los valores de las resistividades al vapor en unidades de $\text{MN s}/(\text{g m})$ o, lo que es lo mismo, en $\text{GN s}/(\text{kg m})$. Debe tenerse cuidado con el correcto uso de los multiplicadores y las conversiones de unidades cuando se utilizan los valores de esta forma, ya que en caso contrario no serían unidades del sistema internacional.

La dificultad que opone un material al paso del vapor de agua también se representa mediante el *factor de resistencia al vapor* μ o *valor- μ* de un material. Éste representa la relación entre la dificultad que opone un material al paso del vapor de agua y la que presenta el aire seco en reposo, es decir entre las resistividades al vapor de ambos,

$$\mu = \frac{r_v(\text{material})}{r_v(\text{aire en reposo})} = \frac{d_v(\text{aire en reposo})}{d_v(\text{material})} = r_v(\text{material}) \times d_v(\text{aire en reposo}), \quad (2-5)$$

que es una magnitud adimensional.

Para ello se toma un valor aproximado para la difusividad al vapor del aire seco en reposo $d_v(\text{aire en reposo}) = 0,2 \text{ g m}/\text{MN s} = 0,2 \times 10^{-9} \text{ kg m}/\text{N s}$, que da un valor $r_v(\text{aire en reposo}) = 5 \times 10^9 \text{ N s}/\text{kg m}$ para su inversa, la resistividad al vapor del aire en reposo.

Tanto el factor de resistencia al vapor (o valor- μ) como la resistividad al vapor y la difusividad (o permeabilidad) al vapor son magnitudes características del material y por tanto no dependen de las dimensiones del elemento concreto considerado.

2.2.2. Difusión del vapor a través de paredes planas simples y compuestas.

Consideremos el caso particular de difusión del vapor a través de una pared plana de espesor b y difusividad al vapor d_v , siendo e_1 y e_2 las tensiones de vapor antes y después de la pared, respectivamente (por simplicidad, consideraremos $e_2 > e_1$). En este caso, la ecuación (2-4) da directamente

$$j_v = \frac{d_v}{b} (e_2 - e_1) \quad (2-6)$$

Tabla 2-1: Valores orientativos de las resistividades al vapor de agua en algunos casos particulares de distintos materiales. Dada la gran diversidad de variantes de materiales y valores esta tabla se da únicamente a modo de ejemplo y sus valores no deben utilizarse como valores de referencia en casos prácticos. Para obtener información más detallada y precisa sobre cada caso y los rangos de los valores deben consultarse las especificaciones del fabricante o referencias especializadas[11, 12, 13]

Material	Resistividad al vapor r_v ($\times 10^9$ Ns/(kg m))
Aire seco en reposo	5
Fábrica de ladrillo	45
Hormigón denso	200
Hormigón aireado con espumantes	30
Cartón-yeso	60
Yeso	50
Revocos y enfoscados	100
Aislantes	
Fibra de vidrio	10
Lana mineral	6
Poliestireno expandido	300
Poliuretano, espuma de	200
Urea formaldehído, espuma de	20

que se puede escribir como

$$j_v = D_v(e_2 - e_1) \quad (2-7)$$

donde D_v es el *coeficiente de difusión al vapor* o *permeancia al vapor*, de unidades $[\text{kg}/(\text{N s}) \equiv \text{s/m}]$. Su inversa $R_v = 1/D_v = b/d_v = b r_v$ es la *resistencia al vapor*, de unidades $[\text{N s/kg} \equiv \text{m/s}]$ en el sistema internacional.

Para representar la oposición de una pared plana concreta al flujo de vapor de agua a su través también se utiliza el *espesor equivalente de aire* s_d , medido en metros en el sistema internacional. Éste representa el espesor de una capa de aire que presentaría la misma resistencia al paso de vapor que el elemento considerado. Para obtenerlo para una capa a partir del factor de resistencia al vapor μ basta con multiplicar éste por el espesor de la capa (obteniéndose el resultado en las unidades del espesor),

$$R_v = \frac{s_d}{d_v(\text{aire quieto})} = \frac{b_{\text{pared}}}{d_v(\text{pared})} \Rightarrow s_d = \frac{d_v(\text{aire quieto})}{d_v(\text{pared})} b_{\text{pared}} = \frac{r_v(\text{pared})}{r_v(\text{aire quieto})} b_{\text{pared}} = \mu b_{\text{pared}}. \quad (2-8)$$

Debe tenerse en cuenta que para una capa, tanto el espesor equivalente de aire como la resistencia y el coeficiente de difusión al vapor sólo pueden definirse para un elemento concreto, con un espesor determinado.

Si en vez de una única capa tenemos una serie de capas planas de espesores b_1, b_2, \dots, b_n y difusividades al vapor $d_{v1}, d_{v2}, \dots, d_{vn}$, las densidades de flujo de difusión a través de cada una de ellas serán de

$$\begin{aligned} j_{v1} &= D_{v1}(e_2 - e_1) \\ j_{v2} &= D_{v2}(e_3 - e_2) \\ &\vdots \\ j_{vn} &= D_{vn}(e_{n+1} - e_n) \end{aligned}$$

En régimen estacionario el flujo a través de todas las capas es el mismo, y si se escriben las ecuaciones anteriores como

$$\begin{aligned} e_2 - e_1 &= \frac{1}{D_{v1}} j_v = R_{v1} j_v \\ e_3 - e_2 &= \frac{1}{D_{v2}} j_v = R_{v2} j_v \\ &\vdots \\ e_{n+1} - e_n &= \frac{1}{D_{vn}} j_v = R_{vn} j_v \end{aligned}$$

y se suman, se tiene

$$e_{n+1} - e_1 = \left(\frac{1}{D_{v_1}} + \frac{1}{D_{v_2}} + \cdots + \frac{1}{D_{v_n}} \right) j_v = (R_{v_1} + R_{v_2} + \cdots + R_{v_n}) j_v$$

que puede escribirse como

$$e_{n+1} - e_1 = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{d_{v_i}} j_v = \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{D_{v_i}} \right] j_v = \left[\sum_{i=1}^n R_{v_i} \right] j_v = R_v j_v = \frac{1}{D_v} j_v \quad (2-9)$$

donde $R_v = \sum_i R_{v_i}$ es la resistencia al vapor del muro completo y $D_v = 1/R_v$ el coeficiente de difusión al vapor del muro completo.

Para una pared plana compuesta de varias capas planas en serie, el espesor equivalente del elemento completo sería la suma de los espesores equivalentes de cada una de las capas,

$$R_v = s_d^{\text{tot}} r_{v \text{ (aire quieto)}} = \sum_i b_i r_{v_i} \Rightarrow s_d^{\text{tot}} = \sum_i \frac{b_i}{r_{v_i}} r_{v \text{ (aire quieto)}} = \sum_i \mu_i b_i = \sum_i s_{d_i}. \quad (2-10)$$

2.3. Difusión térmica.

Cuando hemos hablado de difusión en una mezcla de gases, se ha considerado únicamente el caso en el que tanto la temperatura como la presión del gas son iguales en todas partes, de forma que la única causa de la difusión es el gradiente de concentraciones en la mezcla. Sin embargo, el gradiente de temperaturas también puede dar lugar a una difusión, incluso si la mezcla es de composición uniforme.

Para ver esto consideremos una superficie imaginaria en un medio de concentración uniforme, con distintas temperaturas a cada lado de la superficie. Como las moléculas que se encuentran en el lado de la superficie de mayor temperatura tienen un movimiento térmico mayor, cuando se considera el balance de moléculas que atraviesan la citada superficie tanto en el sentido de temperaturas crecientes como en el sentido de temperaturas decrecientes, se observa que hay un flujo neto de partículas desde un lado a otro. A este proceso en el que aparece un flujo de difusión debido al gradiente de temperaturas se le llama *difusión térmica*. Este es un fenómeno muy importante sobre todo en gases, aunque se presenta también en las mezclas líquidas.

En la difusión térmica, la densidad de flujo de difusión, al que designaremos $j_{\text{tér}}$ es proporcional al gradiente de temperatura del gas y se ha establecido expresarlo de la siguiente manera:

$$j_{\text{tér}} = D_{\text{tér}} \frac{1}{T} \frac{dT}{dn} \quad (2-11)$$

o, en forma vectorial en función del gradiente de temperaturas:

$$\vec{j}_{\text{tér}} = D_{\text{tér}} \frac{1}{T} \vec{\nabla} T \quad (2-12)$$

donde a la magnitud $D_{\text{tér}}$ se le denomina *coeficiente de difusión térmica*. Mientras que el coeficiente de difusión D es siempre positivo, el signo del coeficiente de difusión térmica es en principio indeterminado y depende del flujo de la componente de la mezcla en cuestión.

Cuando la concentración de una componente cualquiera en la mezcla tiende a cero, el coeficiente de difusión térmica de esa componente debe de tender a cero, ya que en el gas puro, evidentemente no hay difusión de la componente que no está presente. De este modo, vemos que el coeficiente de difusión térmica depende considerablemente de la concentración de la mezcla, de nuevo al contrario que el coeficiente de difusión corriente.

Debido a la difusión térmica, en una mezcla gaseosa de composición originalmente homogénea, aparecen diferencias de concentraciones entre lugares calentados de distinta forma. Estas diferencias de concentraciones producen, a su vez, una difusión corriente que actúa en el sentido contrario, tendiendo a anular el gradiente de concentración producido. En condiciones estacionarias, si se mantiene en el gas un gradiente de temperaturas constante, estos dos procesos opuestos acaban conduciendo a un estado estacionario en el que los dos flujos se compensan, manteniéndose una determinada diferencia entre las composiciones de las regiones fría y caliente del gas.

Capítulo 3

Transmisión del calor: radiación.

3.1. Conceptos básicos del intercambio de calor por radiación.

Por el hecho de encontrarse a una cierta temperatura todos los cuerpos emiten radiación electromagnética con unas características que dependen del cuerpo y de la temperatura de emisión. En la transmisión del calor por radiación un cuerpo cede parte de su energía interna a través de la emisión de *ondas electromagnéticas* (que viajan a la velocidad de la luz y no necesitan de un medio material para su propagación). Al absorberse estas ondas electromagnéticas por otros cuerpos, su energía pasa de nuevo a un movimiento térmico de las moléculas y, por tanto, a un aumento de temperatura. A su vez, estos cuerpos se encuentran a una temperatura y por tanto emiten radiación electromagnética correspondiente a dicha temperatura que puede ser absorbida por otros cuerpos intercambiándose energía entre los mismos.

Así, el proceso de intercambio de calor por radiación es un proceso de absorción y emisión posterior de energía en forma de fotones por parte de los átomos y moléculas de una sustancia.

3.1.1. Ondas electromagnéticas. El espectro de la radiación electromagnética.

La *radiación electromagnética* consiste en una perturbación armónica de los campos eléctrico y magnético que se propaga por el espacio. Ambos campos oscilan en direcciones perpendiculares y la propagación tiene lugar en la dirección perpendicular a ambas perturbaciones como se muestra en la figura 3-1 para el caso de una onda electromagnética plana polarizada linealmente.

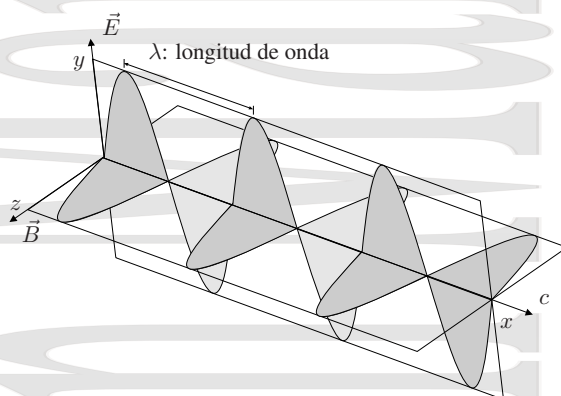


Figura 3-1: Onda electromagnética plana polarizada linealmente.

La radiación electromagnética se caracteriza bien por su *longitud de onda* λ , bien por su *frecuencia de oscilación* ν , relacionadas ambas por la expresión $\nu = c/\lambda$ donde c es la velocidad de propagación. Todos los tipos de radiación electromagnética no son en el fondo más que ondas electromagnéticas de distintas longitudes de onda. Así, la diferencia fundamental entre los rayos γ , los rayos X, la radiación ultravioleta, la radiación visible, la radiación infrarroja, la radiación de microondas o las radiofrecuencias no está en su naturaleza, sino en las distintas energías de cada fotón u onda electromagnética dadas por $h\nu$, con $h = 6,624 \cdot 10^{-34}$ J s la *constante de Planck*.

Nótese que hay otros mecanismos de producción de radiación electromagnética distintos del que hemos visto para la radiación emitida por un cuerpo por encontrarse a una temperatura. Ejemplos de estos otros mecanismos son la radiación sincrotrón o la radiación de frenado utilizada habitualmente para producir rayos X. Ninguno de éstos se considerará aquí.

Los diferentes rangos correspondientes a los distintos tipos de radiación electromagnética se muestran en el *espectro de la radiación electromagnética* de la figura 3-2.

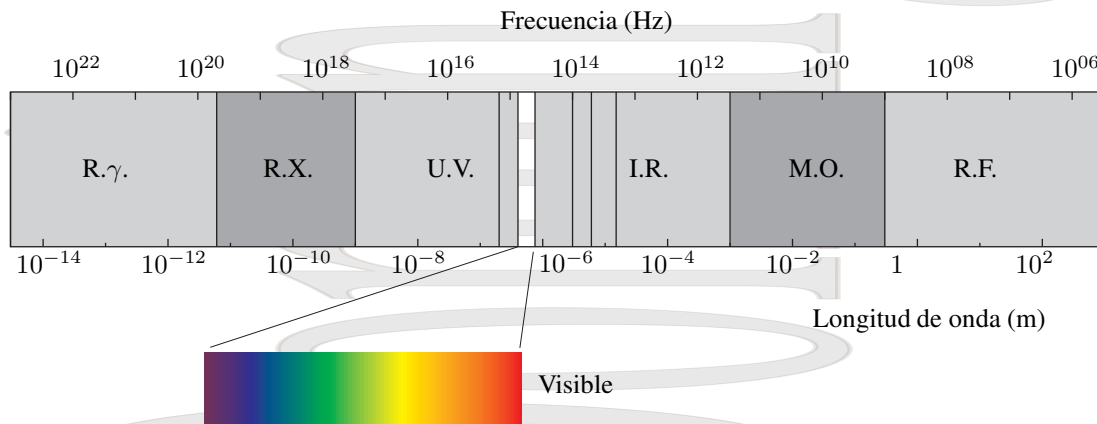


Figura 3-2: El espectro de la radiación electromagnética. La región visible es sólo una pequeña parte del espectro total. R.γ. se refiere a radiación gamma, R.X. a rayos X, U.V. a ultravioleta, I.R. a infrarrojo, M.O. a microondas y R.F. a radiofrecuencias. A su vez el ultravioleta se divide en cercano por un lado y medio y lejano por el otro, separados en la figura por una línea vertical y el infrarrojo en cercano, intermedio, lejano y extremo, también separados en la figura por rayas verticales. Las microondas y las radiofrecuencias también se dividen a su vez en distintas bandas.

Denominamos *radiación térmica* a la radiación electromagnética de una longitud de onda λ comprendida típicamente en el rango de longitudes de onda de $0,1$ a $100 \mu\text{m}$. Éste es el intervalo de longitudes de onda que corresponde a la radiación emitida por los cuerpos por el hecho de encontrarse a una determinada temperatura en un amplio rango. La radiación térmica tiene su origen en el movimiento vibracional y rotacional de los átomos, electrones y moléculas de una sustancia, fenómenos fuertemente relacionados con la temperatura. Por este motivo, al aumentar la temperatura aumenta la emisión de radiación térmica y, en general la distribución en frecuencias se desplaza hacia las frecuencias mayores (mayores energías, longitudes de onda menores), mientras que al disminuir la temperatura ocurre justo al contrario. A la distribución de energía emitida en función de la longitud de onda o frecuencia de la radiación se le denomina *espectro de la radiación*.

Lo que denominamos *radiación visible* o *espectro visible* es una porción muy estrecha del espectro de la radiación electromagnética y en particular de la parte correspondiente a la radiación térmica, porción que se extiende aproximadamente desde $0,35 \mu\text{m}$ hasta $0,75 \mu\text{m}$, como se muestra en la figura 3-2.

La mayor parte de los sólidos y los líquidos emiten con un *espectro continuo* de radiación, es decir, emiten energía en todas las longitudes de onda desde cero a ∞ , aunque la intensidad con que lo hacen depende fuertemente de la región del espectro en la que se observa la radiación emitida. Por el contrario, en el caso de gases y vapores, o en el caso de muchos metales con la superficie pulida, se tiene un *espectro de emisión selectivo* en el que sólo se produce emisión a unas determinadas longitudes de onda.

La intensidad de la radiación emitida depende de:

- Naturaleza de la sustancia.
- Temperatura de la sustancia.
- Longitud de onda λ .
- Estado de la superficie emisora. De hecho, una fina capa de un recubrimiento adecuado puede cambiar completamente el comportamiento de la superficie en relación con la radiación.
- En los gases, también de la presión del gas y del espesor de la capa del mismo.

En los sólidos y líquidos opacos se produce una considerable absorción y emisión y, por tanto, solamente una fina capa superficial interviene en el proceso de transmisión del calor por radiación (el calor se transmite al resto del cuerpo por conducción y convección más que por radiación). Para los cuerpos no conductores opacos, el espesor

típico de esta capa es de ~ 1 mm, mientras que para los conductores opacos, el espesor típico es de ~ 1 μ m. En ambos casos este fenómeno se considera como un fenómeno de superficie. Por el contrario, para cuerpos semitransparentes (vidrios, gases, vapores, cristales, etc...), toda la sustancia interviene en el proceso de transmisión del calor por radiación.

Como hemos visto, la energía radiante de un emisor aumenta con la temperatura, ya que su energía interna aumenta. Cuando la temperatura cambia, no sólo cambia la magnitud absoluta de la energía, sino también su distribución en longitudes de onda (el espectro de la radiación). Al aumentar la temperatura aumenta la proporción de radiación de longitud de onda corta (alta frecuencia-alta energía) mientras que al disminuir la temperatura aumenta la proporción de radiación de longitud de onda larga (baja frecuencia-baja energía). La transmisión del calor por radiación térmica depende de la temperatura de una forma mucho más acusada que en el caso de la conducción o la convección, pudiendo convertirse a altas temperaturas en el mecanismo principal de transmisión de energía.

3.1.2. Definiciones previas.

En primer lugar definiremos algunas magnitudes necesarias para el cálculo de los intercambios de calor por radiación. Al igual que en la conducción del calor por conducción y convección hablaremos de *densidad de flujo energético* \vec{q} como la energía radiante que se propaga por unidad de tiempo y de superficie perpendicular al flujo y de *flujo energético* como la energía radiante atraviesa una cierta superficie real o imaginaria por unidad de tiempo, pero junto a estas definiciones añadiremos otras relacionadas con la fuente radiante o más específicas de radiación. Hay que ser especialmente cuidadoso en el uso de las distintas magnitudes, la diferencia entre unas y otras a menudo es sutil y a veces hay confusión con otras ya conocidas y utilizadas en otros campos, como la intensidad de una onda.

- *Flujo (o potencia) radiante de una fuente, Φ* : Si tenemos una fuente F que emite energía radiante, denominamos flujo radiante de dicha fuente a la energía irradiada por unidad de tiempo en todo el espacio que la rodea (ángulo sólido 4π). Para medirla habría que rodear completamente la fuente por un detector que absorbiera toda la energía emitida. En el Sistema Internacional (S.I.) se mide en vatios [W], pero también puede expresarse en cualquier otra unidad de energía por unidad de tiempo como la kcal/hora. También se le denomina *flujo energético* o *fotónico* de una fuente.
- *Flujo (o potencia) radiante espectral de una fuente, Φ_λ* : Se denomina flujo espectral o monocromático al flujo radiante emitido por unidad de longitud de onda, correspondiente a las radiaciones de longitud de onda comprendida entre λ y $\lambda + d\lambda$. Se mide en vatios/metro, kcal/hm u otra unidad similar.
- *Emitancia (o exitancia) radiante de una fuente, M* : Es la energía irradiada por unidad de tiempo y de superficie por un pequeño elemento de superficie del emisor en tono a un punto P del mismo en todo el espacio que le rodea hacia el exterior

$$M = \frac{d\Phi}{dS} \quad (3-1)$$

donde $d\Phi$ es la energía irradiada por unidad de tiempo (flujo radiante) por el elemento de área dS tangente a la fuente en P . También se la conoce como *poder emisor*. Si la superficie es plana y la emitancia radiante es uniforme en la misma se cumple $M = \Phi/S$. Si la superficie emisora no es cóncava (y no atrapa parte de la radiación emitida), el flujo radiante puede escribirse como

$$\Phi = \int_S M dS$$

- *Emitancia (o exitancia) radiante espectral de una fuente, M_λ* : Si $d^2\Phi$ es el flujo radiante emitido por el elemento de superficie dS situado en el punto P de la fuente en el intervalo de longitudes de onda de anchura $d\lambda$ y origen en λ , se denomina emitancia espectral o monocromática a la magnitud dada por

$$M_\lambda = \frac{d^2\Phi}{dS d\lambda} = \frac{d\Phi_\lambda}{dS} = \frac{dM}{d\lambda} \quad (3-2)$$

La emitancia espectral también se puede expresar en función de la frecuencia (y por unidad de intervalo de frecuencia) o en función de la frecuencia angular (nótese que en estos casos las unidades de la emitancia espectral cambian). Los símbolos correspondientes serían M_ν y M_ω . Las emitancias total y espectral se relacionan

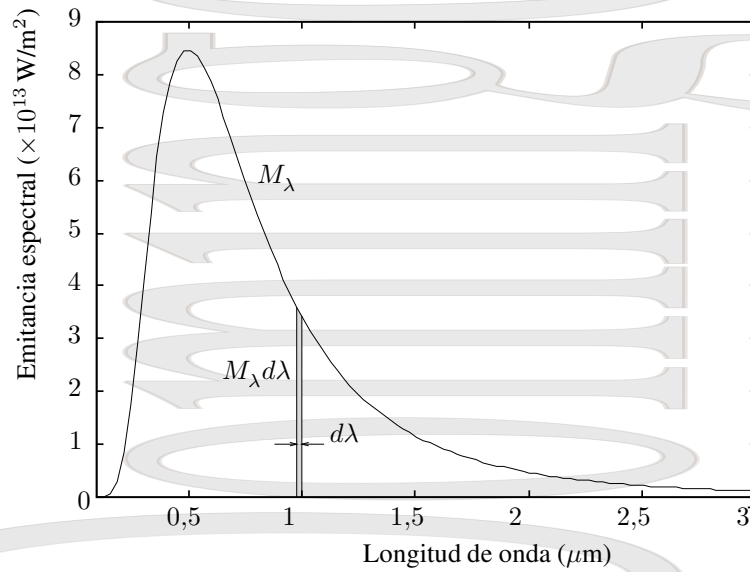


Figura 3-3: Ejemplo de emitancia espectral M_λ de una sustancia en función de la longitud de onda. En la figura se muestra la correspondiente a un cuerpo negro a 5800 K.

mediante

$$M = \int_0^\infty M_\lambda d\lambda$$

Si la superficie emisora no es cóncava podemos despejar el flujo radiante

$$d\Phi = dS \int_0^\infty M_\lambda d\lambda \quad \text{y} \quad \Phi = \int_S dS \int_0^\infty M_\lambda d\lambda$$

Para una sustancia condensada (sólido o líquido) el valor de M_λ se distribuye en función de λ según una curva continua como la que se presenta en la figura 3-3. El área sombreada bajo la curva corresponde a la energía emitida por unidad de superficie y de tiempo en el intervalo de longitudes de onda comprendido entre λ y $\lambda + d\lambda$, es decir $M_\lambda d\lambda$.

El área total bajo la curva es $M = \int_0^\infty M_\lambda d\lambda$ y representa el flujo radiante total emitido por unidad de superficie de la fuente en todo el espectro, es decir, la emitancia de la fuente. Cuando la temperatura crece, el máximo de la emisión se desplaza hacia las longitudes de onda cortas (alta energía).

- **Irradiancia E e irradiancia espectral, E_λ ,** sobre una superficie: Si consideramos una pequeña superficie en torno a un punto, denominamos irradiancia en ese punto al flujo radiante que incide sobre dicha superficie por unidad de superficie. Ídem para la irradiancia espectral, pero con el flujo radiante espectral. A veces se denomina intensidad, aunque puede resultar confuso. Las irradiancias total y espectral se relacionan a través de

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda$$

- Otras magnitudes utilizadas en radiometría son la *radiancia*, la *radiancia angular* y la *intensidad radiante*, que se introducirán en la sección 3.2.8 dedicada a la ley del coseno de Lambert.

3.1.3. Absorción, reflexión y transmisión de la radiación.

Consideremos un haz de energía radiante que incide sobre una superficie. Denominaremos G [Wm^{-2}] a la energía radiante global incidente[†] por unidad de tiempo y de superficie perpendicular al flujo, de forma que la irradiancia de la

[†]Por ejemplo, para el Sol, medida fuera de la atmósfera terrestre, $G = 1353 \text{ Wm}^{-2}$ es la denominada *constante solar*, que representa la energía incidente por unidad de tiempo y de superficie perpendicular al flujo.

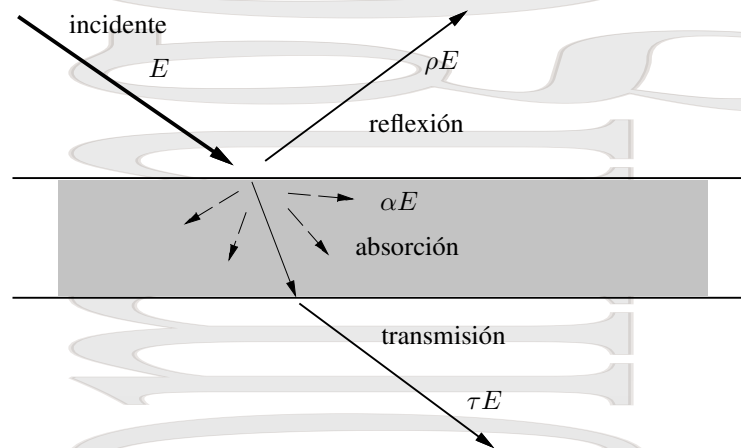


Figura 3-4: Absorción, reflexión y transmisión de la radiación a través de un medio.

superficie es E . Una parte αE de la irradiancia E se absorbe en el material, una parte ρE de la misma se refleja en la superficie y finalmente, una parte τE de dicha irradiancia se transmite a través del cuerpo, como se ve en la figura 3-4. Los coeficientes que aparecen son:

α : *coeficiente de absorción* o *absortividad*, representa la fracción de la energía incidente absorbida por el cuerpo. Algunos autores le denominan *poder absorbente* o *absortancia*, aunque es recomendable evitar esta última forma.

Una magnitud relacionada, el *coeficiente de atenuación* m , describe cómo se va produciendo la atenuación en el medio según penetra la radiación electromagnética en el mismo. Para incidencia en una dirección x normal a la superficie, la radiación que queda en la misma dirección según la onda va avanzando sería

$$q(x) = q_{\text{no reflejada}} e^{-mx} = (1 - \rho) E_{\text{inc}} e^{-mx}$$

e incluye absorción propiamente dicha en la dirección x de propagación y absorción asociada a esparcimiento hacia otras direcciones. Como comentamos al principio, para medios opacos, esta absorción es muy rápida y parece que ocurre en la misma superficie.

ρ : *coeficiente de reflexión* o *reflectividad*, representa la fracción de la energía incidente que es reflejada por la superficie. Algunos autores le denominan *poder reflector* o *reflectancia*, aunque es recomendable evitar esta última forma.

τ : *coeficiente de transmisión* o *transmitividad*, representa la fracción de la energía incidente que se transmite a través del cuerpo. Algunos autores le denominan *poder de transmisión* o *transmitancia*, aunque también es recomendable evitar esta última forma.

El balance energético sobre la superficie da la relación:

$$\alpha E + \rho E + \tau E = E$$

es decir:

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (3-3)$$

Un cuerpo opaco no transmite nada de la radiación incidente, luego para una *superficie opaca* $\tau = 0$ y $\alpha + \rho = 1$. Un reflector perfecto refleja toda la radiación incidente. Así, para un *reflector perfecto*, $\rho = 1$ y $\alpha = \tau = 0$. Un *absorbente perfecto* (cuerpo negro) absorbe toda la radiación incidente. Por tanto, para un *absorbente perfecto*, $\alpha = 1$ y $\tau = \rho = 0$. Para la mayor parte de los gases se cumple $\alpha = \rho \simeq 0$ y $\tau \simeq 1$.

Se pueden definir los coeficientes monocromáticos o espectrales en la forma

$$\begin{aligned}\alpha_\lambda &= \frac{\text{Energía incidente absorbida en el intervalo } \lambda \rightarrow \lambda + d\lambda}{\text{Energía incidente en ese intervalo de } \lambda} \\ \rho_\lambda &= \frac{\text{Energía incidente reflejada en el intervalo } \lambda \rightarrow \lambda + d\lambda}{\text{Energía incidente en ese intervalo de } \lambda} \\ \tau_\lambda &= \frac{\text{Energía incidente transmitida en el intervalo } \lambda \rightarrow \lambda + d\lambda}{\text{Energía incidente en ese intervalo de } \lambda}\end{aligned}$$

cumpléndose, para cada λ :

$$\alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1 \quad (3-4)$$

Podemos obtener la relación entre los factores α y α_λ utilizando la irradiancia espectral E_λ (distribución espectral de la irradiancia E)

$$\alpha = \frac{\text{energía absorbida}}{\text{energía incidente}} = \frac{\int_0^\infty E_\lambda \alpha_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty E_\lambda d\lambda} \quad (3-5)$$

cumpléndose para ρ y τ las relaciones análogas con ρ_λ y τ_λ :

$$\rho = \frac{\text{energía reflejada}}{\text{energía incidente}} = \frac{\int_0^\infty E_\lambda \rho_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty E_\lambda d\lambda} \quad (3-6)$$

y

$$\tau = \frac{\text{energía transmitida}}{\text{energía incidente}} = \frac{\int_0^\infty E_\lambda \tau_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty E_\lambda d\lambda} \quad (3-7)$$

Para la radiación solar, los límites típicos de la integral son en la práctica de 0,25 y 3 μm . Fuera de este rango espectral, apenas hay emisión solar.

Las definiciones anteriores tienen sentido cuando la absorción, reflexión o transmisión en una superficie no dependen del ángulo de incidencia. Cuando no es así, hay que definir los correspondientes valores angulares de absorción y reflexión, complicándose mucho el estudio del problema.

3.2. Leyes de la radiación.

3.2.1. Radiación en el interior de una cavidad.

Denominaremos *cavidad* a un recinto hueco, cerrado, de paredes isotermas. Conocemos por experiencia que la radiación emitida por el exterior de la cavidad hacia fuera depende tanto de la temperatura como de la naturaleza de las paredes de la cavidad. Por ejemplo, una cavidad de paredes externas rojas tendrá un aspecto muy diferente al de una cavidad de paredes externas verdes o azules. Sin embargo, hay una característica muy especial de la radiación dentro de la cavidad. Se puede demostrar que, en dicha cavidad, cuando todo el sistema está en equilibrio,

Cualquiera que sea la naturaleza de los materiales de las paredes interiores de la cavidad, la densidad de energía de la radiación en el interior de la cavidad depende exclusivamente de la temperatura de las paredes, mientras que la densidad espectral de energía depende exclusivamente de la temperatura y de la longitud de onda.

Es decir:

$$u = u(T) \quad (3-8a)$$

$$u_\lambda = u_\lambda(\lambda, T) \quad (3-8b)$$

Para demostrar esto, consideraremos el caso de dos cavidades con paredes de distinta naturaleza que se encuentran

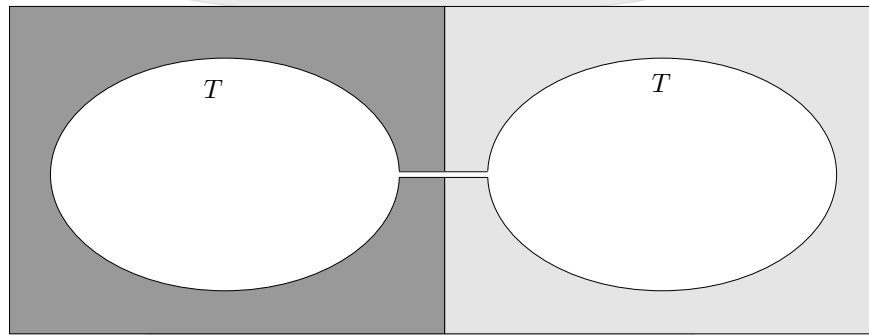


Figura 3-5: Dos cavidades de paredes de distinta naturaleza, pero a la misma temperatura.

a la misma temperatura, como se ilustra en la figura 3-5. Si las intensidades de radiación fueran distintas, habría un transporte neto de energía desde una de las cavidades a la otra. Esto contradeciría el segundo principio de la Termodinámica, ya que una cavidad se enfriaría y la otra se calentaría sin que se realizara trabajo sobre el sistema, luego las intensidades de radiación en ambas cavidades deben ser iguales independientemente de la naturaleza de las paredes. Para extender este argumento a la densidad de energía espectral u_λ bastaría con colocar en el agujero de comunicación entre las dos cavidades un filtro que dejara pasar solamente la radiación en el estrecho rango entre λ y $\lambda + d\lambda$. De este modo, las densidades espectrales de energía de ambas cavidades deberán ser iguales por la misma razón que antes.

Para ver que además debe ser homogénea e isotrópica consideremos la presencia de un cuerpo alargado en el interior de la cavidad a la misma temperatura de las paredes. El hecho de que el cuerpo esté colocado en uno u otro sitio, o con sus superficies en una u otra orientación no hará que abandone el equilibrio térmico, a no ser que haya una intervención externa, ya que el que no fuera así iría contra el segundo principio de la Termodinámica. Por tanto, la radiación en el interior de la cavidad es además *homogénea e isotrópica*.

3.2.2. Cuerpo negro. Ley de Planck.

Se entiende por *cuerpo negro* aquel cuerpo que absorbe toda la energía incidente en todo el espectro de longitudes de onda ($\alpha_\lambda = 1 = \alpha$ para todas las λ). Al mismo tiempo que es un absorbente perfecto un cuerpo negro es también un emisor perfecto, ningún cuerpo puede emitir mejor que un cuerpo negro a temperatura y longitud de onda dadas. Aunque ningún cuerpo se comporta como un cuerpo negro perfecto, una cavidad con las paredes pintadas de negro y dotada de un pequeño orificio actúa de forma bastante similar a como lo haría un cuerpo negro, ya que la radiación incidente tiene pocas oportunidades de escapar (Figura 3-6).

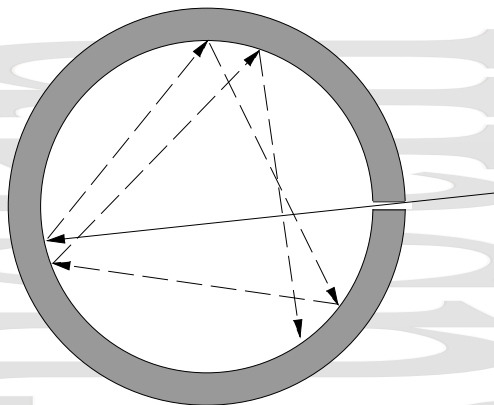


Figura 3-6: Cavidad como un cuerpo negro.

Max Planck (1900) demostró, basándose en la Mecánica Cuántica, que la emitancia monocromática de un cuerpo

negro que se encuentra a una temperatura T y emite hacia el vacío o hacia un gas viene dada por la expresión

$$M_{\lambda}^0(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B T}} - 1} \quad (3-9)$$

conocida como *Ley de Planck*, en la cual c es la velocidad de la luz en el vacío ($2,998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$), h una constante

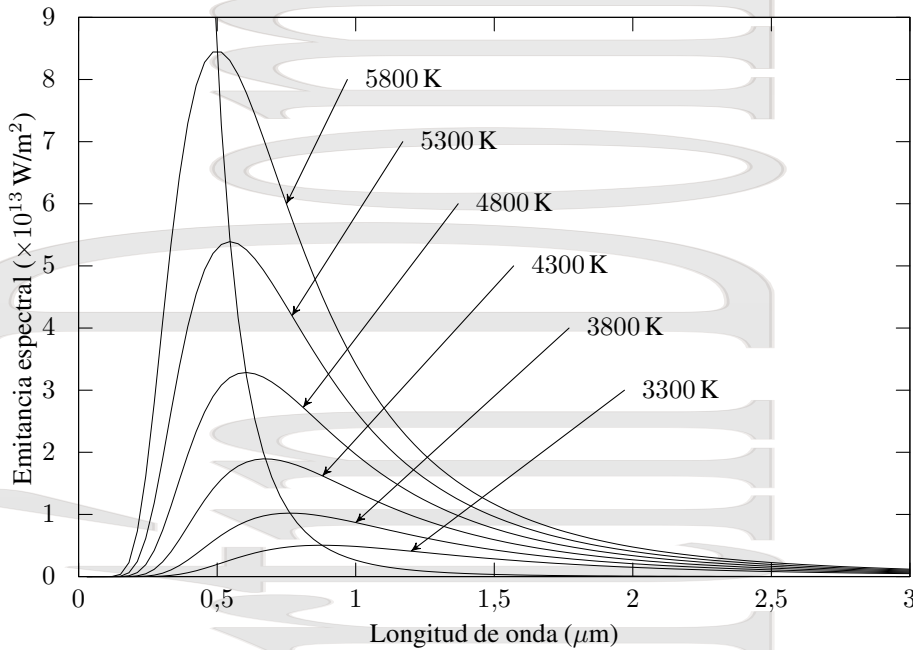


Figura 3-7: Dependencia de la emitancia espectral de un cuerpo negro con la longitud de onda para distintas temperaturas, según la ley de Planck (3-9). También se muestra la evolución de los máximos de emisión para dicho cuerpo negro.

conocida como *constante de Planck* ($6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}^{-1}$), y k_B la constante de Boltzmann ($1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$). Cuando la emisión se realiza hacia un medio transparente con un índice de refracción n , la expresión anterior debe corregirse por un factor $1/n^2$.

La ley de Planck también puede expresarse para la emitancia monocromática en frecuencias o en frecuencias angulares por unidad de intervalo de las mismas (nótese que las unidades son distintas en cada caso)

$$M_{\nu}^0(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (3-10a)$$

$$M_{\omega}^0(\omega, T) = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (3-10b)$$

con $\hbar = h/2\pi$.

La ley de Planck nos da una función continua de emisión para el cuerpo negro y se representa en la figura 3-7 para distintas temperaturas. Como se ve en la figura, al aumentar la temperatura la emisión de un cuerpo negro aumenta en cada longitud de onda y el máximo se desplaza hacia longitudes de onda menores. La radiación emitida por un cuerpo negro es independiente de la dirección y por tanto es *radiación difusa* que sigue la ley de Lambert o de la radiación difusa (sección 3.2.8).

3.2.3. Ley del desplazamiento de Wien.

Experimentalmente ya se había observado que la emisión máxima de un cuerpo negro tiene lugar a longitudes de onda cada vez más cortas según crece la temperatura. La ley de Planck prevé este comportamiento y permite obtener el máximo de la emisión mediante un sencillo cálculo de máximos.

$$\left. \frac{dM_{\lambda}^0(\lambda, T)}{d\lambda} \right|_{T \text{ cte}} = 0.$$

Por simplicidad es preferible utilizar una variable intermedia x de forma que el cálculo de máximos se reduce a

$$\left. \frac{dM_{\lambda}^0(x, T)}{dx} \right|_{T \text{ cte}} = 0, \quad \text{con} \quad x = \frac{hc}{k_B T \lambda}$$

quedando, al derivar y simplificar

$$x_{\text{máx}} = 5 \left(1 - e^{-x_{\text{máx}}} \right).$$

Esta expresión debe resolverse de forma numérica o gráfica, obteniéndose que el poder emisivo espectral del cuerpo negro alcanza su máximo a $x_{\text{máx}} = 4,9651$ para una temperatura T dada. Deshaciendo el cambio de variable, se obtiene que para cada temperatura T , el máximo de emisión de un cuerpo negro a dicha temperatura aparece a una $\lambda_{\text{máx}}$ tal que se cumple

$$T \cdot \lambda_{\text{máx}} = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m} = 2898 \text{ K} \cdot \mu\text{m} \quad \left(= \frac{hc}{k_B x_{\text{máx}}} \right) \quad (3-11)$$

expresión conocida como *ley del desplazamiento de Wien*, que coincide con la ley de Wien experimental que ya era conocida previamente.

Así, según la ley de Wien, cuando en una lámpara incandescente normal una corriente atraviesa un delgado filamento de tungsteno, que se encuentra a una temperatura máxima de unos 2800 – 3000 K, si se comportara como un cuerpo negro la longitud de onda de la máxima emisión sería de unas 0,97 μm , resultado que concuerda con la experiencia. Este máximo de emisión se encuentra en el infrarrojo, por lo que aunque el filamento de tungsteno emite una fracción en el visible, emite mucho más en el infrarrojo. No es posible aumentar mucho más la temperatura del filamento de una lámpara incandescente ya que al aproximarse hacia la temperatura de fusión del tungsteno (El tungsteno funde a 3653 K) éste comienza a evaporarse, degradándose rápidamente el filamento. En las lámparas halógenas incandescentes el filamento alcanza una temperatura algo mayor (3000 – 3300 K), pero con un máximo de emisión que aún se encuentra fuera de la zona visible del espectro incluso si emitiera como un cuerpo negro. Sin embargo, al emitir una mayor parte de visible para una misma potencia son algo más eficientes. Todas estas lámparas incandescentes dan una luz cálida.

Los tubos fluorescentes (y su versión reducida y doblada conocida como lámparas de bajo consumo) funcionan como una variante de las lámparas de descarga de vapor de mercurio a baja presión y no como lámparas incandescentes. Las lámparas LED están compuestas de diodos emisores de luz de distintas longitudes de onda y tampoco funcionan como lámparas incandescentes. Ambos tipos de lámparas tienen una mayor eficiencia energética (mejor para los LED), ya que para un mismo consumo emiten mayor cantidad de luz visible.

Para el Sol, con una temperatura en la superficie del orden de los 5800 K, la ley de Wien para un cuerpo negro daría $\lambda_{\text{máx}} = 0,5 \mu\text{m}$, que corresponde a un verde en la zona central de la región visible del espectro. El ojo humano está adaptado a este máximo de emisión, siendo allí donde tiene su mayor sensibilidad. El hecho de que las señales de peligro sean rojas no es debido a que sea el color para el cual el ojo humano es más sensible, sino a que es un color poco frecuente en la naturaleza y destaca con facilidad.

Por otro lado, si la piel humana emitiera como un cuerpo negro a $37^{\circ}\text{C} = 310 \text{ K}$, el máximo de emisión se encontraría en $\lambda_{\text{máx}} = 9,3 \mu\text{m}$, en la región del infrarrojo lejano.

3.2.4. Ley de Rayleigh-Jeans.

En el límite de altas temperaturas, o longitudes de onda largas, $hc \ll k_B T \lambda$, y es posible desarrollar en serie la exponencial de la forma:

$$e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} \simeq 1 + \frac{1}{1!} \frac{hc}{k_B T \lambda} + \dots + \text{órdenes superiores al primero}$$

Así, quedándonos en el primer orden del desarrollo en serie se tiene, para la emitancia monocromática de un cuerpo negro en la región de grandes longitudes de onda

$$M^0(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h k_B T \lambda}{\lambda^5} = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4} \quad (3-12)$$

relación conocida como *ley de Rayleigh-Jeans*.

Antes de que Planck formulara su ley, las leyes de Wien y Rayleigh-Jeans, junto con la ley de Stefan-Boltzmann que se verá a continuación, eran las únicas relaciones conocidas para la transmisión del calor por radiación. Se sabía que la fórmula de Rayleigh-Jeans funcionaba razonablemente bien en el infrarrojo, con longitudes de onda largas a temperaturas relativamente bajas, pero el intento de extrapolarla a longitudes de onda menores llevaba a una paradoja conocida como *catástrofe ultravioleta*. A una determinada temperatura, la emitancia monocromática sería tanto mayor cuanto más corta fuera la longitud de onda. Así, se emitiría más cuanto mayor fuera la energía de la radiación, por ejemplo, a una temperatura de 5800 K, se emitiría más en el ultravioleta que en el visible, más en los rayos X que en el ultravioleta y más en los rayos gamma que en los rayos X, para una misma anchura espectral en todos los casos. El planeta Tierra estaría entonces achicharrado por los rayos X, gamma y otras radiaciones ionizantes de mayor energía que se emitirían aún en mayor cantidad y, absurdo tras absurdo, la energía total emitida sería infinita.

La ley de Planck resuelve esta situación absurda y da un valor para la energía total emitida que coincide con la Ley de Stefan-Boltzmann.

3.2.5. Ley de Stefan-Boltzmann.

Recordemos que denominábamos emitancia o poder emisivo total o integral al flujo radiante por unidad de superficie emitido en todas las longitudes de onda por una superficie que se encuentra a una temperatura T .

Si la superficie se comporta como una superficie negra, el poder emisivo vendrá dado por la integral de la distribución de Planck a todas las longitudes de onda del espectro,

$$M^0(T) = \int_0^\infty M_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda = 2\pi c^2 h \int_0^\infty \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1} d\lambda$$

que da como resultado

$$M^0(T) = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \left(\frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} \right) T^4, \quad \text{con } x = \frac{hc}{k_B T \lambda}.$$

De aquí resulta la *ley de Stefan-Boltzmann*[†] para la radiación del cuerpo negro que se escribe como

$$M^0(T) = \sigma T^4 \quad [\text{Wm}^{-2}] \quad (3-13)$$

[†]En realidad, la ley de Stefan-Boltzmann es anterior a la ley de Planck de la radiación del cuerpo negro. Boltzmann llegó a ella a partir de los trabajos de Stefan, considerando un modelo estadístico de un gas de radiación (un gas de fotones).

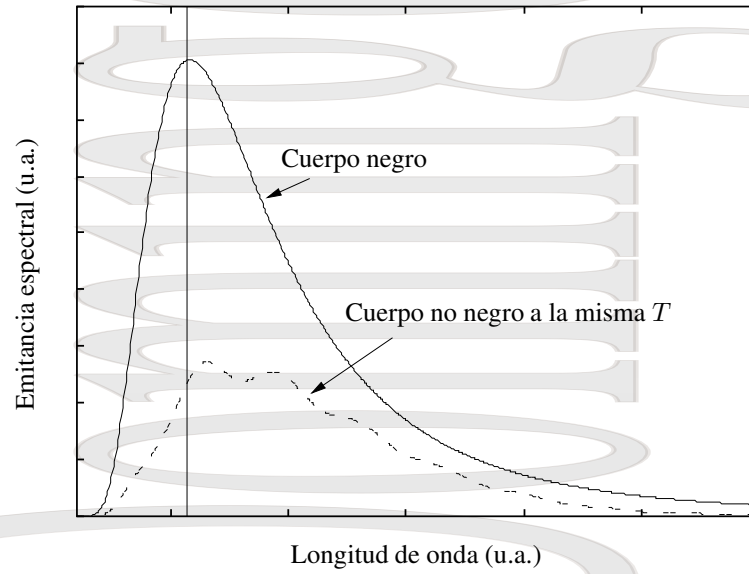


Figura 3–8: Diferencias entre un cuerpo negro y un hipotético cuerpo no negro a la misma temperatura. Se observa que a una longitud de onda dada el cuerpo no negro siempre emite con un poder emisivo menor y su máximo de emisión normalmente está desplazado hacia las longitudes de onda largas (esto último puede no ser cierto en determinadas condiciones de emisividad).

donde

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad \left(= \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \right)$$

es la *constante de Stefan-Boltzmann*. Debido al pequeño valor de σ , a bajas temperaturas el efecto de la radiación es insignificante. Por el contrario, la dependencia en T^4 hace que para altas temperaturas la radiación se convierta en el mecanismo predominante de transmisión del calor.

Aunque la ley de Stefan nos da la radiación emitida en todo el conjunto de longitudes de onda por un cuerpo negro a una temperatura T a menudo nos interesa únicamente la radiación emitida en un cierto intervalo. En este caso, para evitar la integración explícita de la expresión de Planck se suele utilizar una magnitud adimensional denominada *función de radiación del cuerpo negro* $F(\lambda, T)$ definida como

$$F(\lambda, T) = \frac{\int_0^\lambda M_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty M_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda} = \frac{\int_0^\lambda M_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda}{\sigma T^4} \quad (3-14)$$

que representa la fracción de la radiación emitida por un cuerpo negro a una temperatura T en el intervalo de longitudes de onda $0 \rightarrow \lambda$. Esta función se encuentra tabulada en muchos libros y manuales de referencia, especialmente en los más clásicos, aunque la integración numérica de la expresión de Planck ya no es tan complicada como fue y, por tanto, la función ha perdido buena parte de su utilidad práctica.

3.2.6. Emisividad. Ley de Kirchoff.

Factor de emisión o emisividad.

Como vimos, un cuerpo negro es un emisor perfecto y por tanto a la hora de caracterizar la bondad de un determinado emisor lo compararemos con la emisión de un cuerpo negro en las mismas condiciones. Al comparar el espectro de emisión de un cuerpo cualquiera con el de un cuerpo negro a la misma temperatura se observa lo siguiente (Figura 3–8):

1. Para cada longitud de onda, la curva $M_\lambda^0(\lambda, T)$ correspondiente a la emitancia espectral del cuerpo negro está siempre por encima de la correspondiente a cualquier otro cuerpo no negro que se encuentre a la misma temperatura.

2. No sólo el valor, sino también la forma de la emitancia espectral para el cuerpo no negro es, en general, distinta de la del cuerpo negro a la misma temperatura (salvo que se trate de un cuerpo gris). Asimismo, su máximo normalmente corresponde a una longitud de onda mayor (menores frecuencia y energía).

Se define el *factor de emisión monocromático* o *emisividad espectral* ϵ_λ de un cuerpo como el cociente:

$$\epsilon_\lambda = \frac{M_\lambda(\lambda, T)}{M_\lambda^0(\lambda, T)} \quad (3-15)$$

donde $M_\lambda(\lambda, T)$ es la emitancia espectral del cuerpo no negro a una temperatura T (energía que dicho cuerpo no negro emite por unidad de tiempo, superficie e intervalo espectral en el intervalo de longitudes de onda $\lambda \rightarrow \lambda + d\lambda$) y $M_\lambda^0(\lambda, T)$ la emitancia espectral de un cuerpo negro que se encontrara a la misma temperatura T que el cuerpo no negro considerado. En el caso más general en el que la radiación no se emite por igual en todas las direcciones (radiación no difusa, véase la sección 3.2.8 acerca de la ley de Lambert y la radiación difusa), además de depender de la longitud de onda y de la temperatura, la emisividad de una superficie dependerá de la dirección de la radiación emitida.

La *emisividad total* de un cuerpo cualquiera a una temperatura T vendrá dada por:

$$\epsilon = \frac{M(T)}{M^0(T)} = \frac{\int_0^\infty M_\lambda(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty M_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda} = \frac{\int_0^\infty \epsilon_\lambda M_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda}{\sigma T^4} \quad (3-16)$$

Como $M_\lambda^0(\lambda, T) > M_\lambda(\lambda, T)$, se cumplirá siempre que para un cuerpo no negro $\epsilon_\lambda < 1$ y que $\epsilon < 1$. Para un cuerpo negro, $M = M^0$ y por tanto, $\epsilon = 1$ y $\epsilon_\lambda = 1$ para todas las frecuencias. Asimismo se tiene que, para un cuerpo cualquiera:

$$M(T) = \epsilon \sigma T^4 \quad (3-17)$$

donde ϵ depende de la temperatura, del material y del estado de la superficie.

Cuando la radiación emitida no es difusa y la emisión no se produce por igual en todas las direcciones hay que definir las correspondientes emisividades angulares, correspondientes a la emisividad según una determinada dirección.

Ley de Kirchoff.

Consideremos las dos experiencias siguientes para llegar a la ley de Kirchoff

Experiencia primera: Coloquemos un cuerpo negro en el interior de la cavidad, a la misma temperatura que las paredes de la cavidad.

Como el cuerpo y la cavidad están a la misma temperatura, no habrá intercambio neto de calor entre ambos. Así, serán iguales el flujo radiante emitido por el cuerpo hacia la cavidad $\Phi^{\text{CN} \rightarrow \text{CAV}}$ y la parte del flujo radiante emitido por la cavidad que incide sobre el cuerpo, $\Phi^{\text{CAV} \rightarrow \text{CN}}$:

$$\Phi^{\text{CN} \rightarrow \text{CAV}} = \Phi^{\text{CAV} \rightarrow \text{CN}}$$

Por tanto, la radiación de un cuerpo negro es igual a la radiación de equilibrio existente en el interior de la cavidad a la misma temperatura.

Experiencia segunda: Coloquemos ahora en el mismo lugar del interior de la cavidad un cuerpo no negro de la misma forma y orientación que el anterior y a la misma temperatura que las paredes. Antes vimos que como no debe haber intercambio neto de calor entre el cuerpo negro y la cavidad, en el equilibrio el cuerpo negro emitía todo lo que absorbía. Análogamente ocurrirá con el cuerpo no negro, éste sólo emitirá aquella fracción de la energía incidente que ha absorbido:

$$\alpha \Phi^{\text{CAV} \rightarrow \text{Cuerpo}} = \alpha \Phi^{\text{CAV} \rightarrow \text{CN}} = \Phi^{\text{Cuerpo} \rightarrow \text{CAV}} = \epsilon \Phi^{\text{CN} \rightarrow \text{CAV}}$$

donde hemos utilizado la emisividad ϵ (3-16), cociente entre la energía emitida por un cuerpo y lo que emitiría si fuese un cuerpo negro a la misma temperatura. Como acabamos de ver que $\Phi^{CN \rightarrow CAV} = \Phi^{CAV \rightarrow CN}$, se tiene finalmente que:

$$\alpha = \epsilon \quad (3-18a)$$

relación conocida como *ley de Kirchoff*, que en esta forma es válida exclusivamente en el equilibrio térmico (para intercambio de calor por radiación entre cuerpos que se encuentran a la misma temperatura).

La ley de Kirchoff se cumple también para los factores de absorción y emisividades espectrales:

$$\alpha_\lambda = \epsilon_\lambda \quad (3-18b)$$

pero en esta forma es válida tanto en el equilibrio térmico como fuera del mismo (es decir, puede utilizarse para analizar el intercambio de calor por radiación entre cuerpos a distinta temperatura).

Tabla 3-1: Valores aproximados de los coeficientes de absorción de distintas superficies a las temperaturas ambiente y de la radiación solar.

Material	$\alpha_{IR} (25^\circ C)$	$\alpha_{VIS} (5800 K)$
Superficies negras no metálicas (asfalto, carbón, pizarra, pintura, papel).	0,90 – 0,98	0,85 – 0,98
Aluminio níquel o cromo muy pulido, papel de aluminio.	0,02 – 0,04	0,10 – 0,40
Cobre o bronce pulido	0,02 – 0,05	0,3 – 0,5
Cobre, latón o aluminio sin pulir, acero galvanizado, hierro pulido.	0,2 – 0,3	0,4 – 0,56
Cobre oxidado	0,8	0,65
Ladrillo y piedra amarillos, ladrillo refractario.	0,85 – 0,95	0,50 – 0,70
Ladrillo y cerámicas rojas, hormigón, piedra, hierro y acero oxidados y pinturas oscuras (rojo, marrón, verde)	0,85 – 0,95	0,65 – 0,70
Ladrillo, cerámica y piedra blancos, papel, yeso, escayola, cal,	0,85 – 0,95	0,30 – 0,50
Pintura blanca	0,9 – 0,95	0,12 – 0,16
Pintura brillante dorada, de bronce o de aluminio	0,2 – 0,3	0,3 – 0,5
Vidrio común de ventana	0,90 – 0,95	Transparente

En la tabla 3-1 se dan algunos valores aproximados de los coeficientes de absorción de distintas superficies para la radiación cuya temperatura de color es la temperatura ambiente ($\sim 25^\circ C$, $\lambda \sim 10 \mu m$) y para radiación de temperatura de color la de la radiación solar ($\sim 5800 K$, $\lambda \sim 0,5 \mu m$). De acuerdo con la Ley de Kirchoff, estos valores serían los correspondientes a la emisividad de las superficies a estas temperaturas, en el supuesto de que los materiales las aguantaran. Nótese la similitud de los valores para las pinturas negra y blanca para temperatura ambiente, donde la emisión es básicamente infrarrojo. Obviamente los resultados son muy distintos para la temperatura de la radiación solar (5800 K) con el máximo de emisión en el visible. Así, los coeficientes de absorción en el infrarrojo de ambas pinturas serían mucho más parecidos de lo que su gran diferencia para el visible nos haría suponer.

La emisividad global de una superficie dada a una cierta temperatura es función de las características de la superficie y de la temperatura y a menudo se encuentran tablas correspondientes a la misma para distintas superficies emisoras. Sin embargo la absorción global de una superficie es función no sólo de la temperatura y características de la superficie sino también de la distribución espectral de la radiación incidente, por lo que no es posible tener tablas generales de coeficientes de absorción globales para una superficie dada a una cierta temperatura.

3.2.7. Cuerpo gris.

Ninguna superficie real emite como un cuerpo negro. Para el estudio de la radiación, es útil definir una superficie que tenga una distribución espectral semejante en aspecto a la del cuerpo negro, pero con un poder emisor inferior

en la misma proporción en todas las frecuencias, de modo que se cumpla que la emisividad es independiente de la frecuencia, $\alpha_\lambda = \epsilon_\lambda = cte$. A esta superficie se le llama *superficie gris* (Figura 3-9) o *cuerpo gris*. Algo análogo ocurre con los factores de transmisión y reflexión. En función de la irradiancia espectral E_λ de la superficie gris, el

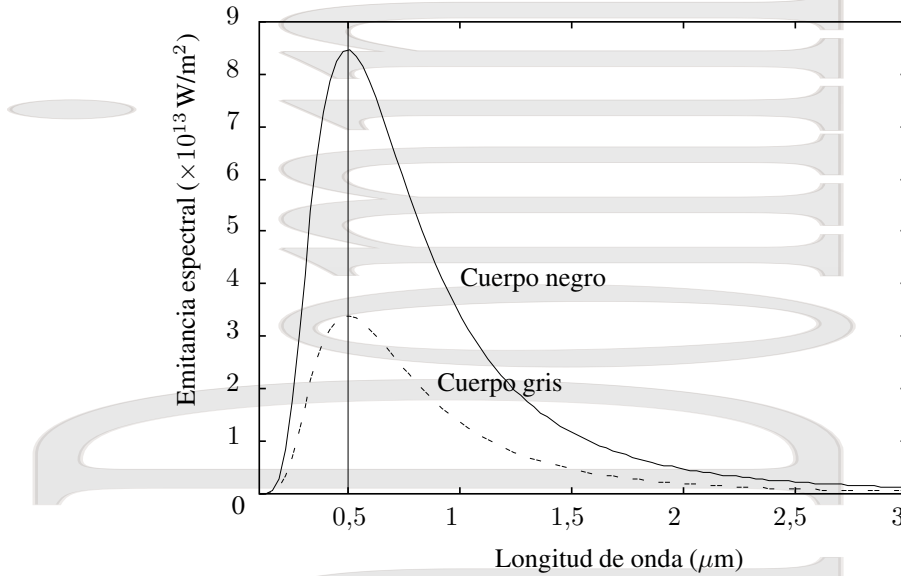


Figura 3-9: Diferencias entre un cuerpo negro y un cuerpo gris. En la figura se muestra la diferencia entre la emitancia espectral del Sol emitiendo como un cuerpo negro a 5800 K y un supuesto cuerpo gris a la misma temperatura con $\alpha_\lambda = \epsilon_\lambda = \alpha = \epsilon = 0,4$.

coeficiente de absorción del cuerpo gris será

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda E_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty E_\lambda d\lambda} = \alpha_\lambda \frac{\int_0^\infty E_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty E_\lambda d\lambda} = \alpha_\lambda$$

y análogamente para los casos de transmisión y reflexión. Así, para un cuerpo gris:

$$\alpha = \alpha_\lambda \quad (3-19a)$$

$$\rho = \rho_\lambda \quad (3-19b)$$

$$\tau = \tau_\lambda \quad (3-19c)$$

quedando la ley de Kirchhoff para un cuerpo gris en la forma $\alpha = \epsilon$, con la diferencia de que en el caso del cuerpo gris esta expresión es válida incluso cuando el cuerpo no está en equilibrio térmico con sus alrededores. Así, conociendo la emisividad de un cuerpo gris a una cierta longitud de onda λ se conocen también las emisividades y coeficientes de absorción totales de la superficie.

3.2.8. La ley de Lambert.

Definiremos primero la *radiancia* L [$\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}$] (también denominada *luminancia*, especialmente en fotometría) como la energía emitida por unidad de tiempo, ángulo sólido y *superficie vista* del emisor (superficie reducida a la proyección de este área sobre el plano perpendicular a la dirección de radiación, a la superficie vista) de un cuerpo en la dirección θ . La radiancia también se denomina *intensidad específica* o *brillo*.

Asimismo se define la *intensidad radiante* [W/sr] en una cierta dirección como la integral a la superficie total del emisor de la radiancia en esa dirección, es decir, la energía emitida por unidad de tiempo y ángulo sólido en dicha dirección por todo el emisor considerado. Tanto la radiancia como la intensidad radiante tienen sus correspondientes magnitudes espectrales, la *radiancia espectral* [W sr^{-1}] y la *intensidad radiante espectral* [$\text{W m}^{-1}\text{sr}^{-1}$]. Debe tenerse cuidado con no mezclar el concepto de intensidad radiante con la intensidad de una onda que aparece en otros campos del conocimiento.

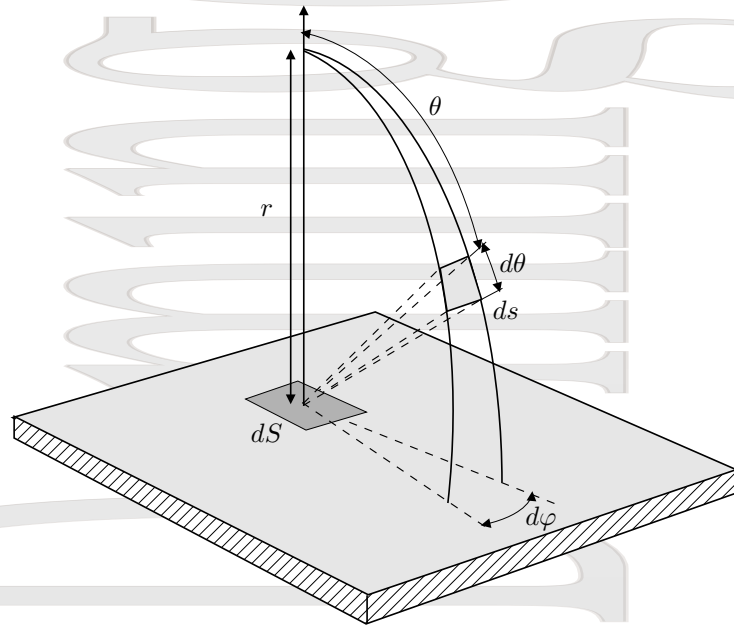


Figura 3-10: Ley de Lambert

Consideremos una superficie emisora elemental de área dS , y sobre ella una semiesfera imaginaria de radio r centrada en dS (figura 3-10). Consideremos ahora un elemento de superficie ds de la semiesfera, en cuyo centro queremos determinar el valor de la intensidad de radiación emitida por dS .

Si los 4π estereorradianes subtendidos por toda la esfera corresponden a la superficie total de la esfera $4\pi r^2$, el ángulo sólido subtendido por la superficie ds será:

$$d\Omega = 4\pi \frac{ds}{4\pi r^2} = \frac{ds}{r^2} \quad (3-20)$$

Como ds ve al emisor como si tuviera una superficie efectiva $dS \cos \theta$, la radiancia o luminancia será:

$$L = \frac{d^2\Phi}{dS \cos \theta} \frac{1}{d\Omega} = \frac{r^2}{dS \cos \theta} \frac{d^2\Phi}{ds} \quad (3-21)$$

Para los cuerpos en los que se cumple la *Ley de Lambert*, la radiación se emite en todas las direcciones con la misma radiancia L , por lo que se le llama también *ley de la radiación difusa*. Se dice que estos cuerpos que cumplen la ley de Lambert emiten *radiación difusa*. Esto ocurre porque, aunque la emisión de un emisor difuso en una dirección disminuye con el coseno al alejarnos de la normal, la superficie vista del emisor exactamente disminuye exactamente en la misma proporción, compensándose ambos cambios en el cálculo de la radiancia. En particular, la radiación emitida por un cuerpo negro es difusa.

Determinemos ahora la relación entre la radiancia y la emitancia para un sistema que cumple la ley de Lambert. Despejando el flujo $d^2\Phi$ de la ecuación (3-21) se tiene

$$d^2\Phi = \frac{L}{r^2} ds dS \cos \theta = L dS \sin \theta \cos \theta d\theta d\psi$$

donde se ha tenido en cuenta la forma $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\psi$ del elemento infinitesimal de superficie en coordenadas esféricas. De este modo, si se cumple la ley de Lambert (L no depende de la dirección), la energía radiante que atraviesa la superficie total por unidad de tiempo (y que ha sido emitida por dS) queda

$$d\Phi = L dS \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi = L dS \left. \frac{\sin^2 \theta}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \psi \right|_0^{2\pi} = L dS \pi$$

Como toda la radiación que atraviesa la superficie del hemisferio ha sido emitida por dS , la energía radiante total debe ser MdS , quedando:

$$LdS\pi = MdS \Rightarrow L = \frac{M}{\pi} \quad (3-22)$$

expresión válida cuando se cumple la ley de Lambert y además, exceptuando M no sale ninguna otra energía de la superficie, es decir, no hay transmisión desde detrás de la superficie, ni reflexión hacia afuera de la misma.

La *radiancia angular* L_θ se define de forma similar a la radiancia, pero respecto de la superficie real del emisor y no respecto de la proyección de la misma. Entre las dos existe la relación

$$L_\theta = L \cos \theta \quad (3-23)$$

que si L satisface la ley de Lambert es otra forma de expresar dicha ley. A la ley de Lambert también se le denomina *ley del coseno de Lambert* a partir de (3-23). Para una superficie negra, con $M = \sigma T^4$, la radiancia angular quedaría

$$L_\theta^0 = L^0 \cos \theta = \frac{M^0 \cos \theta}{\pi} = \frac{\sigma T^4 \cos \theta}{\pi} \quad (3-24)$$

3.3. El efecto invernadero.

Estudiaremos a continuación un comportamiento singular que tiene lugar cuando una superficie está rodeada por un medio (por ejemplo un vidrio, una placa de plástico transparente o la atmósfera terrestre) que tiene un coeficiente de transmisión alto para la mayor parte de la radiación solar que incide desde fuera, pero bajo para la radiación térmica emitida desde la superficie, como se ve en la figura 3-11.

La radiación solar incidente corresponde aproximadamente a un cuerpo negro a una temperatura de $\simeq 5800$ K. Para este rango de longitudes de onda (fundamentalmente en el visible e infrarrojo cercano), la transmitancia espectral del vidrio es muy alta (próxima a 1), mientras que es muy baja (~ 0) para las longitudes de onda muy larga a las que emiten las superficies de los cuerpos interiores (figura 3-11). Así, el vidrio transmite bien el visible y el infrarrojo próximo, pero no transmite las longitudes de onda superiores a $3 \mu\text{m}$.

De este modo, la mayor parte de la radiación solar incidente, cuyo máximo de emisión está a $\lambda_{\text{máx}} \simeq 0,5 \mu\text{m}$, pasa sin dificultades a través del vidrio y es parcialmente absorbida en el interior del invernadero, dependiendo del coeficiente de absorción de los cuerpos que se encuentran en éste. La parte reflejada vuelve hacia atrás sin cambiar su frecuencia, por lo que atraviesa el vidrio y se pierde hacia el exterior. Por su parte, los cuerpos de dentro del “invernadero” emiten radiación térmica correspondiente a su temperatura (para una temperatura de 40°C , el máximo de emisión está en $\lambda_{\text{máx}} \simeq 9 \mu\text{m}$) (figura 3-11b). Sin embargo, para esta radiación el vidrio es prácticamente opaco (figura 3-11a), por lo que ésta bien es reflejada de nuevo hacia el interior o bien es absorbida por el vidrio y reemitida hacia el interior y el exterior como radiación térmica a la temperatura del vidrio. El resultado final es que hay una acumulación de energía en el interior del recinto, que actúa como un captador solar, de forma que su temperatura es mayor que la que habría si no estuviera el vidrio. Este fenómeno se conoce como *efecto invernadero*. Curiosamente la causa principal de la temperatura que se alcanza en el interior de un invernadero no es el propio efecto invernadero, sino el hecho de que la estructura cerrada del invernadero hace disminuir notablemente la pérdida de calor por convección.

Un efecto análogo tiene lugar en la Tierra, donde la atmósfera, las nubes y la polución juegan el papel del vidrio, siendo éste proceso un elemento determinante de la temperatura superficial de la Tierra. En este caso las nubes y la polución no reflejan la radiación emitida por la superficie terrestre como en el caso del vidrio, sino que la absorben y reemiten en todas las direcciones, parcialmente de nuevo hacia la superficie terrestre, produciéndose la acumulación de energía sobre la superficie terrestre.

3.4. Superficies selectivas.

¿Cómo debe ser un captador solar para conseguir una mayor eficacia? La superficie ideal de un captador de energía solar sería aquella que:

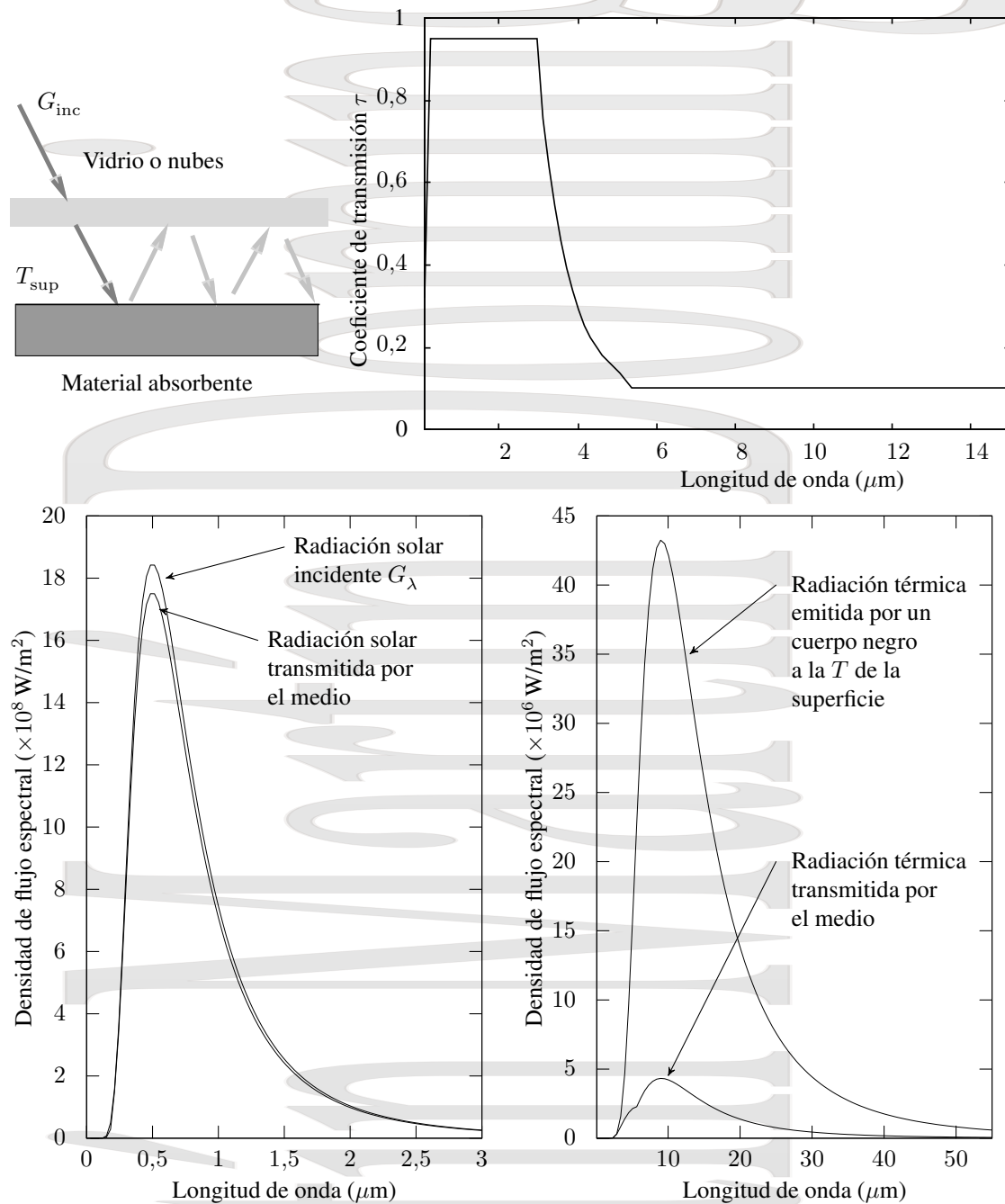


Figura 3-11: El efecto invernadero. Considérese un medio cuya transmitancia es la que se muestra en la parte superior de la figura, situado sobre una superficie absorbente. Sobre esta superficie y a través del medio, incide radiación solar (con un máximo a 529 nm , como corresponde a la emitancia espectral de un cuerpo negro a una temperatura de 5800 K). Como a la longitud de onda de la radiación solar la transmitancia es alta, la mayor parte de la radiación incidente atraviesa el medio e incide sobre la superficie, donde se absorbe según su coeficiente de absorción. Como la temperatura en la superficie es más baja (por ejemplo, 47°C o 320 K), la radiación emitida por ésta es de longitud de onda más larga (el máximo de la emitancia espectral de un cuerpo negro a esa temperatura está en torno a $9 \mu m$) y al ser su transmitancia baja a esa longitud de onda no puede atravesar el medio, bien porque se refleja o bien porque se absorbe y reemite de nuevo. La consecuencia de esto es que se acumula energía entre la superficie y el medio, produciéndose un aumento de la temperatura.

- Absorbe casi toda la energía de la radiación solar incidente (α alto para $\lambda < 3 \mu\text{m}$).
- Emite débilmente en el infrarrojo lejano (α bajo para $\lambda > 3 \mu\text{m}$). Esto correspondería a la mayor parte del espectro de radiación emitida por el absorbente a su temperatura (típicamente $50 - 100^\circ\text{C}$)

Si la transmisión es baja, $\tau = 0$ y $\alpha + \rho = 1$, lo que equivale a:

- Baja reflectividad por debajo de $3 \mu\text{m}$.
- Alta reflectividad por encima de $3 \mu\text{m}$.

Estas superficies, llamadas *superficies selectivas*, pueden alcanzar una temperatura T_s en el estado estacionario mayor que la que alcanzaría un cuerpo negro en esa misma situación.

Veamos un ejemplo de esto. Si E es la energía solar incidente por unidad de tiempo y de superficie de la superficie (lo que hemos denominado irradiancia), para una superficie negra se cumplirá, una vez alcanzado el régimen permanente

$$E = \sigma T_n^4 \quad \Rightarrow \quad T_n^4 = \frac{E}{\sigma} \quad (3-25)$$

mientras que para una superficie selectiva con $\alpha_{\text{vis}} = 0,9$ y $\epsilon_{\text{ir}} = 0,1$ se tiene que:

$$\alpha E = \epsilon \sigma T_s^4 \quad \Rightarrow \quad T_s^4 = \frac{\alpha_{\text{vis}}}{\epsilon_{\text{ir}}} \frac{E}{\sigma} = 9 \frac{E}{\sigma} \quad (3-26)$$

De este modo, si para la radiación solar sobre la superficie se tuviera el valor $E = 1 \text{ kWm}^{-2}$ un cuerpo negro alcanzaría en régimen permanente una temperatura de 364 K mientras que la superficie selectiva de las características anteriores alcanzaría los 631 K.

Hay que hacer notar que el hecho de que ϵ no sea igual a α no va en contra de la ley de Kirchoff, ya que esta establece que ambos coeficientes deben ser iguales, pero a la misma longitud de onda (y los globales únicamente en el equilibrio térmico, es decir, para cuerpos a la misma temperatura). Así una superficie selectiva ideal sería un excelente emisor en el visible ($\alpha_{\text{vis}} \simeq \epsilon_{\text{vis}}$), emitiendo casi como un cuerpo negro. Sin embargo, como lo que emite en el visible un cuerpo negro a 40°C es prácticamente despreciable, emitirá muy poco. Asimismo, es un pésimo absorbente en el infrarrojo lejano ($\alpha_{\text{ir}} \simeq \epsilon_{\text{ir}}$), pero como la componente de la radiación solar en ese rango es muy pequeña, apenas se deja de captar energía solar por esa razón.

3.5. Radiación directa entre cuerpos a distinta temperatura.

3.5.1. Radiación efectiva.

Hemos visto que un cuerpo emite una radiación propia por encontrarse a una cierta temperatura, y habíamos denominado a la densidad del flujo radiante propio *emitancia radiante* o *poder emisor* E . Esta emisión propia se hace a costa de su energía interna y viene determinada por su temperatura, material y estado de la superficie. Si no incidiera ninguna radiación sobre el cuerpo de éste saldría únicamente la radiación propia. Consideremos un cuerpo en el que la transmisión es despreciable y por tanto $\tau = 0$ y por consiguiente $\rho + \alpha = 1$ (Figura 3-13). Sobre éste incidirá por unidad de superficie y de tiempo la radiación E_{inc} (irradiancia) procedente de otros cuerpos. Una parte q_{abs} de esta radiación es absorbida por el cuerpo, mientras que la parte restante q_{ref} es reflejada por la superficie. Además, el cuerpo emite su radiación propia. A la radiación total que sale del cuerpo por unidad de tiempo y superficie se le denomina *radiosidad*, *radiación efectiva* o *emergente* J o q_{ef} [Wm^{-2}]:

$$q_{\text{ef}} = M + q_{\text{ref}} = M + \rho E_{\text{inc}} = M + (1 - \alpha) E_{\text{inc}} \quad (3-27)$$

Al flujo térmico que incluye tanto la radiación emergente de la superficie como la incidente sobre la misma se le denomina *flujo térmico neto* o *resultante*, designándose a la *densidad neta de flujo radiante* o *resultante* como q_{neto} . Consideremos el flujo térmico neto a través de dos superficies imaginarias S_1 y S_2 . S_1 es una superficie que se encuentra dentro del cuerpo muy cerca de su superficie, de modo que la radiación reflejada le es ajena y S_2 es una

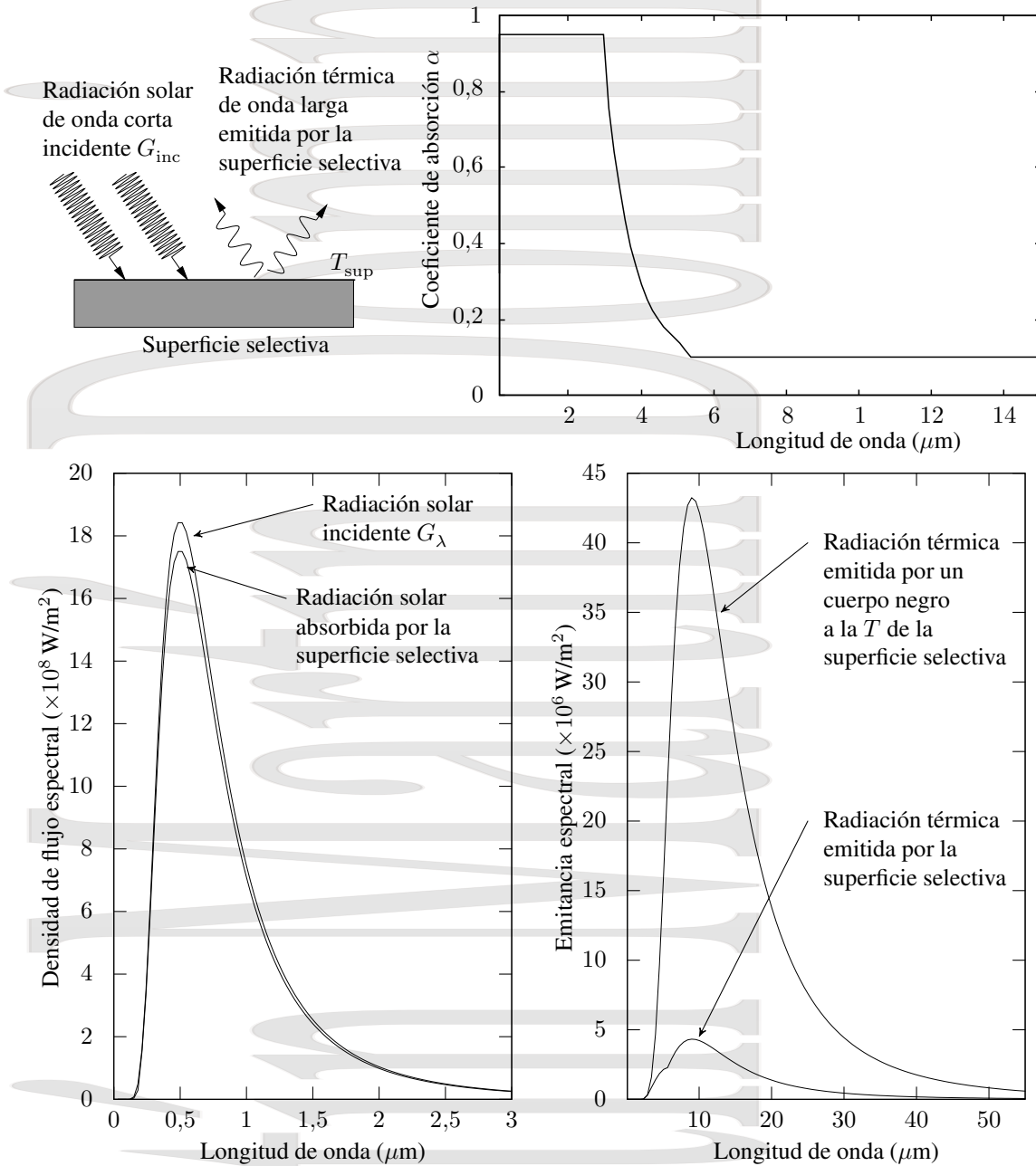


Figura 3-12: Comportamiento de una superficie selectiva típica cuyo factor de absorción espectral (y emisividad espectral) son las dadas en la figura. La radiación solar incidente (de onda más corta) es en su mayor parte absorbida por la superficie. Sin embargo como la superficie a su temperatura emite en el infrarrojo, a una longitud de onda más larga, su emisión es considerablemente más baja que la de un cuerpo negro a esa temperatura. Así absorbe bien en el visible, pero emite mal en el infrarrojo, dando como resultado un calentamiento hasta que se alcanza una temperatura a la que la emisión iguale a la absorción. Esta temperatura puede ser mayor que la temperatura que alcanzaría un cuerpo negro en las mismas condiciones.

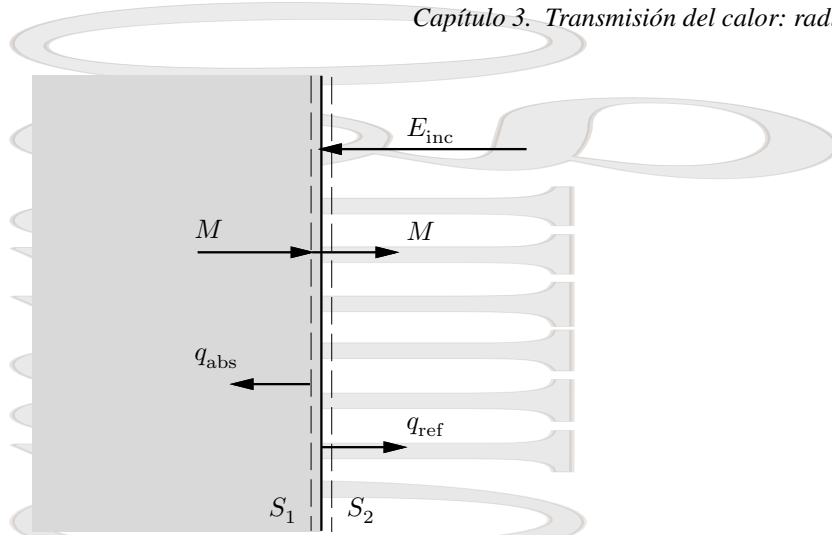


Figura 3-13: Tipos de radiación térmica.

superficie que se encuentra fuera del cuerpo, pero muy próxima a su superficie, de modo que la radiación absorbida le es ajena. Se puede calcular la densidad neta del flujo térmico en cualquiera de las dos superficies:

$$q_{\text{neto}} = M - q_{\text{abs}} = M - \alpha E_{\text{inc}} \quad (3-28a)$$

$$q_{\text{neto}} = M + q_{\text{ref}} - E_{\text{inc}} = q_{\text{ef}} - E_{\text{inc}} \quad (3-28b)$$

que, eliminando E_{inc} entre las dos ecuaciones da:

$$J \equiv q_{\text{ef}} = \frac{1}{\alpha} [M - (1 - \alpha)q_{\text{neto}}] \quad (3-29a)$$

$$q_{\text{neto}} = \frac{M - \alpha q_{\text{ef}}}{1 - \alpha} \quad (3-29b)$$

con el convenio de signos para q (+) hacia la derecha del cuerpo (el exterior) y (-) hacia la izquierda del cuerpo (el interior). El flujo radiante efectivo (saliente) Φ_{ef} en función del flujo radiante neto Φ_{neto} vendrá dado por

$$\Phi_{\text{ef}} = \frac{1}{\alpha} [\Phi_{\text{em}} - (1 - \alpha)\Phi_{\text{neto}}] \quad (3-30a)$$

$$\Phi_{\text{neto}} = \frac{\Phi_{\text{em}} - \alpha\Phi_{\text{ef}}}{1 - \alpha} \quad (3-30b)$$

con el mismo convenio de signos.

3.5.2. Planos infinitos y paralelos.

Método de las reflexiones múltiples (con $\tau \sim 0$).

Estudiamos a continuación el caso del intercambio de calor por radiación entre dos planos infinitos y paralelos. El primer método que utilizaremos es el de las reflexiones múltiples y nos limitaremos a sistemas que satisfagan las siguientes condiciones:

- α es independiente de T para cada uno de los dos planos, así como del punto de la superficie.
- Existe una distribución uniforme de temperaturas en la superficie.
- No hay transferencia de calor dentro del sólido ni por conducción ni por convección.
- Se ha alcanzado el régimen permanente.

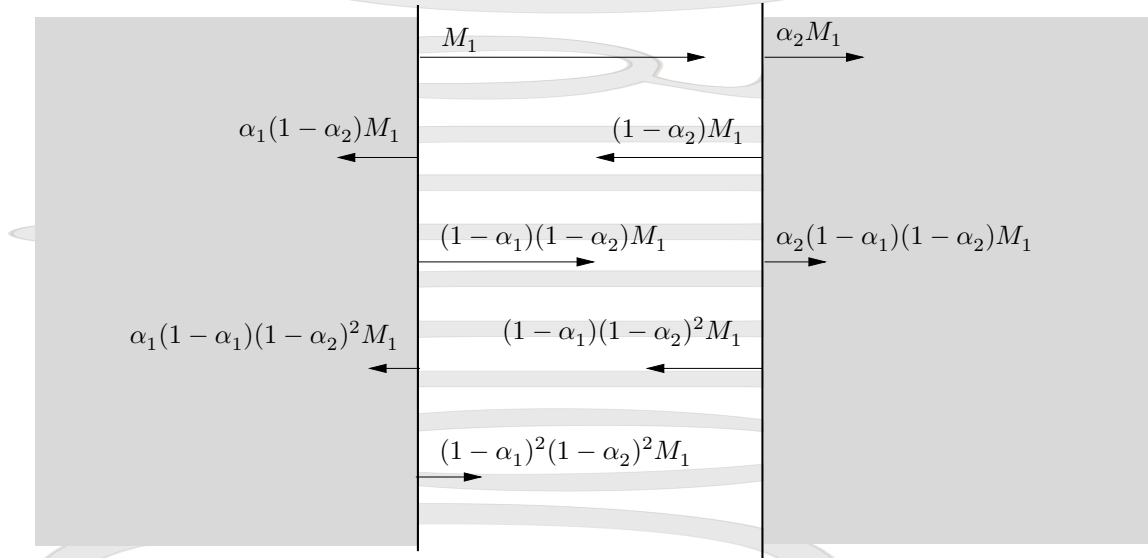


Figura 3–14: Método de las reflexiones múltiples para analizar la transferencia de calor por radiación entre planos infinitos y paralelos.

En este caso, ocurre lo siguiente, como se muestra en la figura 3–14.

- El plano 1 emite con una emitancia M_1 .
- El plano 2 absorbe α_2 y refleja $(1 - \alpha_2)M_1$.
- El plano 1 absorbe $\alpha_1(1 - \alpha_2)M_1$ y refleja $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)M_1$.
- El plano 2 absorbe $\alpha_2(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)M_1$ y refleja $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)^2 M_1$.
- ...

Y así sucesivamente. Algo similar ocurre con la energía M_2 emitida originalmente por el cuerpo 2 por unidad de tiempo y superficie (emitancia de 2). De la energía que ha emitido el cuerpo 1, ese mismo cuerpo 1 absorbe una energía:

$$q_{1 \rightarrow 1}^{\text{abs}} = M_1(1 + k + k^2 + \dots)(1 - \alpha_2)\alpha_1 = M_1 \left(\frac{1}{1 - k} \right) (1 - \alpha_2)\alpha_1$$

donde se ha introducido $k = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)$. Del mismo modo, de la energía que ha emitido el cuerpo 2, el cuerpo 1 absorbe:

$$q_{2 \rightarrow 1}^{\text{abs}} = M_2(1 + k + k^2 + \dots)\alpha_1 = \frac{\alpha_1}{1 - k} M_2$$

La densidad del flujo radiante neto (flujo de energía por unidad de superficie perpendicular al flujo) será la diferencia entre lo que sale y lo que entra:

$$q_{\text{neto}} = M_1 - q_{1 \rightarrow 1}^{\text{abs}} - q_{2 \rightarrow 1}^{\text{abs}} = M_1 - M_1 \left(\frac{1}{1 - k} \right) (1 - \alpha_2)\alpha_1 - \frac{\alpha_1}{1 - k} M_2$$

que, operando da:

$$q_{\text{neto}} = \frac{\alpha_2 M_1 - \alpha_1 M_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} = \frac{\frac{M_1}{\alpha_1} - \frac{M_2}{\alpha_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1} \quad (3-31)$$

En este caso, el cálculo es relativamente sencillo, pero este método se complica mucho cuando hay que considerar otras geometrías. Nótese que aquí hemos estudiado el caso general y por tanto no tiene por qué ser cierto para los valores globales que $\epsilon = \alpha$, aunque sí lo sea para los valores espectrales. Más adelante se estudiará el caso de los planos grises en los que además $\epsilon = \alpha$.

Si uno de los dos planos, por ejemplo el 1, es una superficie negra perfecta con $\alpha_1 = 1$, la densidad neta del flujo térmico es:

$$q_{\text{neto}} = \alpha_2 M_1 - M_2$$

Método de la radiación neta.

Repetiremos ahora este mismo cálculo, pero ahora con un segundo método que a menudo es más útil que el que acabamos de presentar. Para ello utilizaremos el concepto y las fórmulas obtenidas para la radiación efectiva. La densidad neta de flujo radiante entre 1 y 2 será la diferencia entre las densidades efectivas de flujo radiante que salen de cada uno de los cuerpos:

$$q_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = q_1^{\text{ef}} - q_2^{\text{ef}} \quad (3-32)$$

La radiación efectiva o radiosidad que sale de cada uno de los cuerpos viene dada por:

$$q_1^{\text{ef}} = \frac{1}{\alpha_1} [M_1 - (1 - \alpha_1) q_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2}] \quad (3-33a)$$

$$q_2^{\text{ef}} = \frac{1}{\alpha_2} [M_2 - (1 - \alpha_2) q_{\text{neto}}^{2 \rightarrow 1}] \quad (3-33b)$$

En condiciones de radiación en régimen permanente $q_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = -q_{\text{neto}}^{2 \rightarrow 1}$ que, sustituyendo en la ecuación (3-32) nos da de nuevo la ecuación (3-31), pero de una forma mucho más sencilla que cuando utilizamos el método de las reflexiones múltiples.

Método de la radiación efectiva.

Repitamos ahora el cálculo del intercambio de calor por radiación entre dos planos infinitos y paralelos por un tercer método muy relacionado con el anterior, el método de la radiación efectiva. Anteriormente vimos que $q_{\text{ef}} = M + q_{\text{ref}} = M + \rho E_{\text{inc}}$. Si además tenemos en cuenta que estamos considerando el caso $\tau = 0 \Rightarrow \rho = 1 - \alpha$ se obtiene, para las radiaciones efectivas que salen de 1 y 2, el sistema de ecuaciones

$$q_1^{\text{ef}} = M_1 + (1 - \alpha_1) q_2^{\text{ef}} \quad (3-34a)$$

$$q_2^{\text{ef}} = M_2 + (1 - \alpha_2) q_1^{\text{ef}} \quad (3-34b)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene:

$$q_1^{\text{ef}} = \frac{M_1 + M_2 - \alpha_1 M_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}$$

$$q_2^{\text{ef}} = \frac{M_1 + M_2 - \alpha_2 M_1}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}$$

que, sustituyendo en la ecuación (3-32) da directamente la ecuación (3-31), pero de nuevo de una forma mucho menos complicada que en el método de las reflexiones múltiples, y además más aplicable a otras geometrías.

3.5.3. Intercambio de calor por radiación entre planos grises infinitos y paralelos

Densidad neta de flujo radiante entre dos planos grises infinitos y paralelos.

Obtengamos ahora el cálculo final reemplazando en la ecuación (3-31) el valor del poder emisor de cada uno de los planos dado por la ley de Stefan Boltzmann:

$$M_1 = \epsilon_1 \sigma T_1^4 \quad M_2 = \epsilon_2 \sigma T_2^4 \quad (3-35)$$

que da, teniendo en cuenta la ley de Kirchoff para planos grises ($\alpha = \epsilon$),

$$q_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1} = \alpha_{12}\sigma(T_1^4 - T_2^4) \quad (3-36)$$

donde α_{12} es el *coeficiente de absorción reducido* o *absortividad reducida* del sistema, que para este sistema geométrico concreto es:

$$\alpha_{12} = \left[\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1 \right]^{-1} \quad (3-37)$$

Para el caso de dos planos negros, se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, y que $\rho_1 = \rho_2 = \tau_1 = \tau_2 = 0$, quedando la relación ya conocida:

$$q_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \sigma(T_1^4 - T_2^4) \quad (3-38)$$

Si solo uno de los dos planos es negro, por ejemplo, $\alpha_1 = 1$, se tiene que $\alpha_{12} = \alpha_2$, y

$$q_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \alpha_2\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

Si uno de los planos es muy reflectante ($\rho \simeq 1$) se tiene que $\alpha \simeq 0$ y por tanto $\alpha_{12} \simeq 0$. En estas condiciones, el intercambio de calor por radiación es muy pequeño.

Efecto de las pantallas grises en el intercambio de calor entre planos grises.

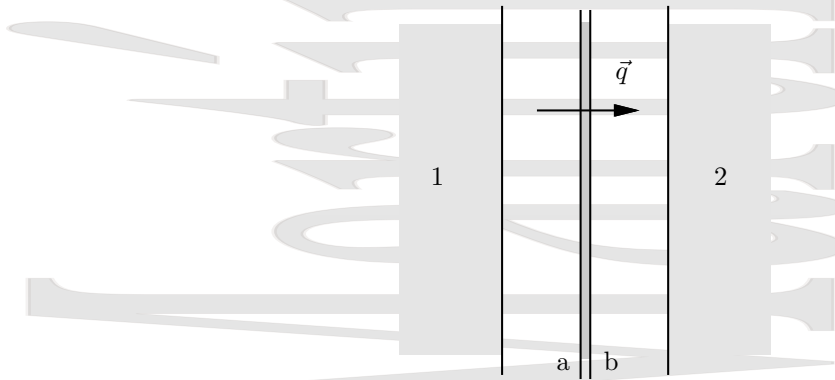


Figura 3-15: Efecto de un apantallamiento en la transmisión del calor por radiación entre dos planos infinitos y paralelos.

Estudiaremos ahora el efecto de una pantalla de superficies grises en la transmisión de calor por radiación entre dos planos grises infinitos y paralelos en una situación como la que se muestra en la figura (3-15). Al tratarse de cuerpos grises $\epsilon = \alpha$ y a partir de la ecuación (3-36) escribimos, en régimen estacionario, las ecuaciones para la transferencia de calor entre uno de los planos y la cara de la pantalla que le corresponde y el otro plano y su correspondiente cara de la pantalla,

$$\left[\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_a} - 1 \right] \frac{q_{\text{neto}}}{\sigma} = T_1^4 - T_p^4 \quad (3-39a)$$

$$\left[\frac{1}{\alpha_b} + \frac{1}{\alpha_2} - 1 \right] \frac{q_{\text{neto}}}{\sigma} = T_p^4 - T_2^4 \quad (3-39b)$$

donde hemos supuesto por simplicidad que la temperatura T_p en la pantalla es uniforme y que q_{neto} es el mismo en ambos casos al limitarnos a régimen estacionario. Si sumamos ambas ecuaciones y despejamos q_{neto} se obtiene la expresión

$$q_{\text{neto}} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_a} + \frac{1}{\alpha_b} - 2} \quad (3-40)$$

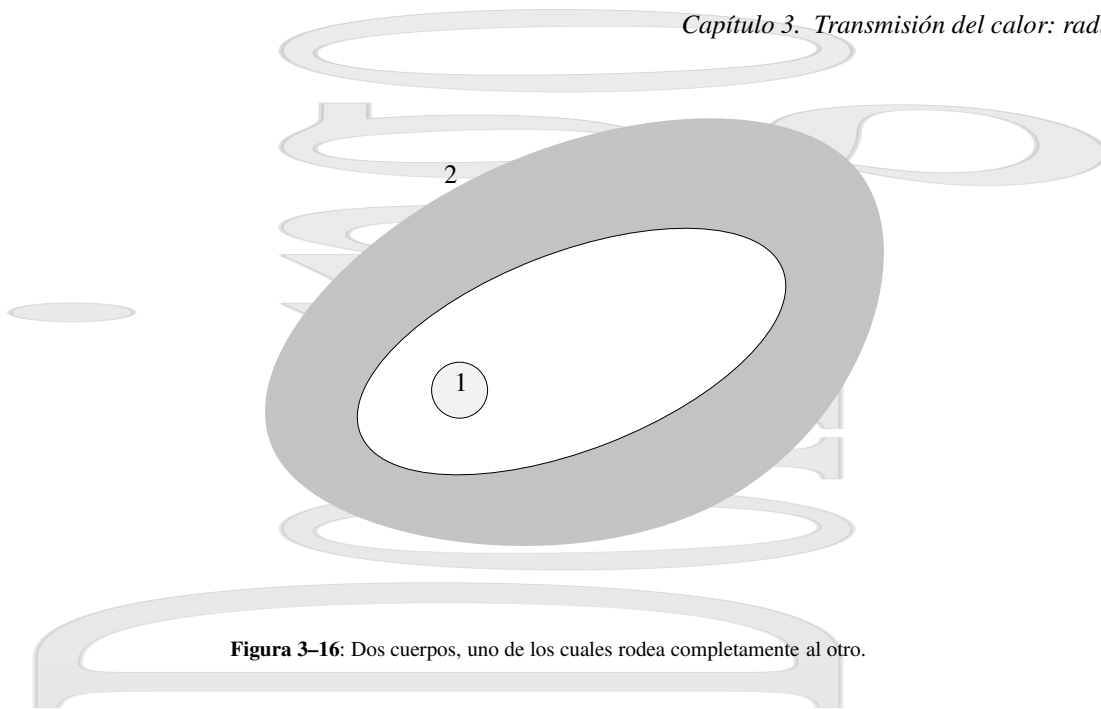


Figura 3-16: Dos cuerpos, uno de los cuales rodea completamente al otro.

Si una de las superficies de la pantalla está muy pulimentada y tiene una alta reflectividad el coeficiente de absorción será muy bajo y por tanto q_{neto} será muy bajo. Nótese que no es necesario que las dos superficies de la pantalla lo sean, basta con que lo sea una.

Si todos los planos y las superficies de la pantalla tienen la misma emisividad, de (3-40) se tiene que q_{neto} con la pantalla pasa a ser la mitad del que habría habido sin la pantalla. Asimismo, si se tienen n pantallas y todas las superficies implicadas tienen la misma emisividad,

$$q_{\text{con pantallas}}^{\text{neto}} = \frac{1}{n+1} q_{\text{sin pantallas}}^{\text{neto}} \quad (3-41)$$

3.5.4. Transferencia de calor por radiación entre un cuerpo y su entorno.

Consideremos ahora dos cuerpos, uno de los cuales rodea completamente al otro, no habiendo pantallas entre ambos. El cuerpo 1 es un cuerpo convexo y el cuerpo 2 cóncavo, siendo sus superficies respectivas S_1 y S_2 , sus absorbancias α_1 y α_2 y sus temperaturas T_1 y T_2 , con $T_1 > T_2$.

El flujo radiante neto será:

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \Phi_1^{\text{ef}} - F_{21} \Phi_2^{\text{ef}} \quad (3-42)$$

donde F_{21} es el *factor de forma*, que da la fracción de la energía total emitida por 2 que es capturada por 1. F_{12} es 1 al ser el cuerpo 1 convexo (no captura nada de su propia energía, toda la captura el cuerpo 2) y el cuerpo 2 envolverlo y por la misma razón $F_{11} = 0$. F_{22} no es uno, ya que parte de la energía que emite es capturada por el cuerpo 1, ni cero, ya que captura parte de su energía emitida, sino $F_{22} = 1 - F_{21}$. Esto caracteriza la fracción de la energía emitida por el cuerpo 2 que es absorbida por sí mismo.

El flujo radiante efectivo que abandona cada uno de los cuerpos es:

$$\Phi_1^{\text{ef}} = \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) \Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} + \frac{\Phi_1}{\alpha_1} \quad (3-43a)$$

$$\Phi_2^{\text{ef}} = \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right) \Phi_{\text{neto}}^{2 \rightarrow 1} + \frac{\Phi_2}{\alpha_2} \quad (3-43b)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3-42) y teniendo en cuenta que, en el estado estacionario, $\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = -\Phi_{\text{neto}}^{2 \rightarrow 1}$

se obtiene:

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \frac{\frac{\Phi_1}{\alpha_1} - \frac{\Phi_2}{\alpha_2} F_{21}}{\frac{1}{\alpha_1} + \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1 \right) F_{21}} \quad (3-44)$$

Escribiendo los flujos radiantes propios Φ_1 y Φ_2 en función de las superficies y emisividades de cada cuerpo,

$$\Phi_1 = S_1 \epsilon_1 \sigma T_1^4 \quad \Phi_2 = S_2 \epsilon_2 \sigma T_2^4$$

queda, para el flujo radiante neto:

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \frac{\frac{S_1 \epsilon_1 \sigma T_1^4}{\alpha_1} - \frac{S_2 \epsilon_2 \sigma T_2^4}{\alpha_2} F_{21}}{\frac{1}{\alpha_1} + \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1 \right) F_{21}} \quad (3-45)$$

Estimemos ahora cual es el *factor de forma*. Cuando se tiene radiación difusa desde superficies homogéneas e isotermas (cada una), éste es un factor puramente geométrico, por lo que no dependerá de la diferencia de temperaturas entre los dos cuerpos. Así, estudiaremos el problema en el equilibrio térmico, con ambos cuerpos a la misma temperatura. En este caso, $\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = 0$, quedando la ecuación anterior como:

$$\frac{\epsilon_1}{\alpha_1} S_1 - \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} S_2 F_{21} = 0$$

que da:

$$F_{21} = \frac{\alpha_2 \epsilon_1 S_1}{\alpha_1 \epsilon_2 S_2} \quad (3-46)$$

Como según la ley de Kirchoff, en el equilibrio térmico $\epsilon = \alpha$, se tiene que, para este caso de un cuerpo completamente envuelto por el otro, el factor de forma es:

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \quad (3-47)$$

En el caso general, el factor de forma depende de la geometría del sistema y de sus propiedades ópticas, pero no de la diferencia de temperaturas entre los dos cuerpos, al ser un factor puramente geométrico.

Si los planos son grises, $\alpha_1 = \epsilon_1$ y $\alpha_2 = \epsilon_2$ y el resultado anterior da, para el flujo radiante neto:

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma \left[S_1 T_1^4 - S_2 \frac{S_1}{S_2} T_2^4 \right]}{\frac{1}{\alpha_1} + \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1 \right) \frac{S_1}{S_2}} = S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \alpha_{\text{red}_{12}} \quad (3-48)$$

donde $\alpha_{\text{red}_{12}}$ es el *coeficiente de absorción reducido* o *absortividad reducida* para este sistema de un cuerpo completamente envuelto por el otro:

$$\alpha_{\text{red}_{12}} = \left[\frac{1}{\alpha_1} + \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1 \right) \frac{S_1}{S_2} \right]^{-1} \quad (3-49)$$

En el caso particular $S_1 \simeq S_2$ (cuerpos en contacto completo) se obtiene el mismo resultado que para las placas plano-paralelas

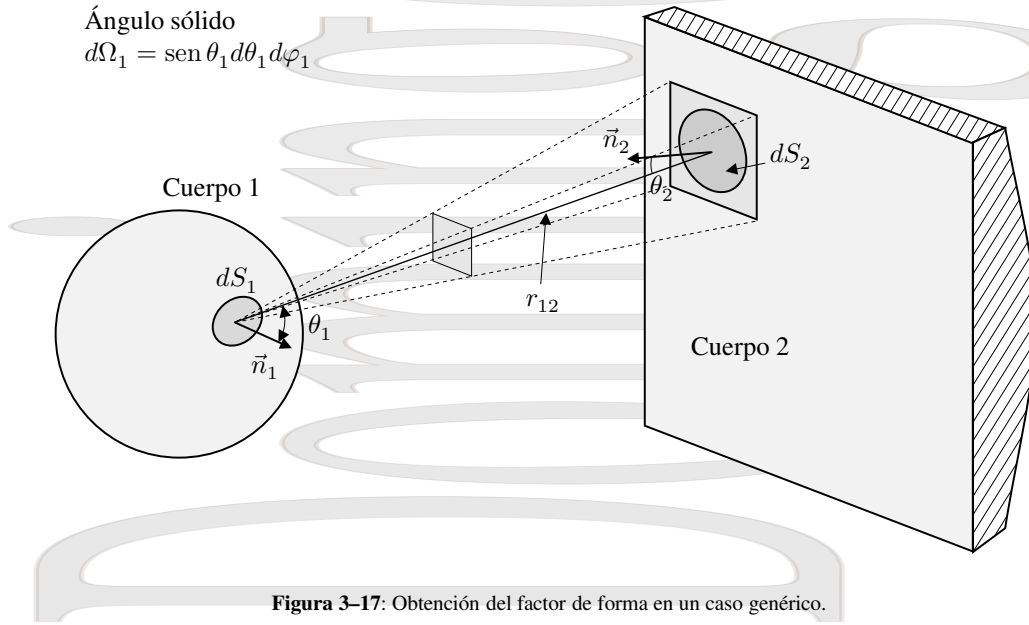
$$\alpha_{\text{red}_{12}} = \left[\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1 \right]^{-1}. \quad (3-37)$$

Otro caso particular aparece cuando $S_1 \ll S_2$ que da $S_1/S_2 \rightarrow 0$ y por tanto $F_{21} = S_1/S_2 \rightarrow 0$, quedando $\alpha_{\text{red}_{12}} = \alpha_1$. Si sólo el cuerpo 2 es un cuerpo negro, se cumple $\alpha_2 = 1$ y se tiene también que $\alpha_{\text{red}_{12}} = \alpha_1$. En ambos casos, se cumple

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = S_1 \epsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (3-50)$$

Finalmente, si ambos son cuerpos negros se cumple $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, lo que da

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \sigma S_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (3-51)$$



3.5.5. Obtención general del factor de forma.

Veamos como se calcula el *factor de forma* o *factor de intercambio de radiación* en un caso más general. Todo el desarrollo que haremos para la obtención del factor de forma es válido en el caso de radiación difusa emitida por superficies homogéneas tanto en características como en temperatura, que llega a través de un medio sin absorción, emisión ni esparcimiento. En este caso el factor de forma, que introdujimos en la sección anterior como la fracción de la energía emitida por una superficie que llega a otra, es un factor puramente geométrico. Por tanto, una vez obtenido para un caso nos vale para todos los demás casos entre dichas superficies, con las limitaciones que hemos mencionado.

Para obtener el factor de forma consideraremos el sistema de la figura 3-17 en el que se tienen dos cuerpos genéricos 1 y 2 entre los que se produce el intercambio de calor por radiación y en ellos dos elementos de superficie que se ven mutuamente, dS_1 en el cuerpo 1 y dS_2 en el cuerpo 2.

Consideremos la energía radiada desde dS_1 en un ángulo sólido $\sin \theta_1 d\theta_1 d\psi_1$ situado alrededor de r_{12} , suficientemente grande para que dS_2 quede completamente comprendida dentro del haz que subtiende ese ángulo sólido. Esta energía radiada en la unidad de tiempo será, si se cumple la ley de Lambert, y ambas superficies son negras (los cuerpos negros emiten radiación difusa que satisface la ley de Lambert),

$$L dS_{\text{vista}_1} d\Omega_1 = L_\theta dS_1 d\Omega_1 = \left(\frac{\sigma T_1^4}{\pi} \cos \theta_1 \right) dS_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\psi_1. \quad (3-52)$$

Como la superficie es uniforme en características y temperatura y la radiación emitida es difusa, ésta no depende ni del punto de la superficie ni de la dirección, por lo que la fracción de la energía proveniente de la superficie dS_1 en el ángulo sólido $d\Omega_1$ que es interceptada por la superficie dS_2 será el cociente entre el área de dS_2 proyectada sobre un plano perpendicular al radio vector r_{12} (área de dS_2 vista desde dS_1) y el área formada por la intersección del ángulo sólido $\sin \theta_1 d\theta_1 d\psi_1$ con una esfera de radio r_{12} centrada en dS_1

$$\frac{dS_2 \cos \theta_2}{r_{12}^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\psi_1}$$

por lo que el flujo radiante de dS_1 a dS_2 será:

$$d\Phi^{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \cos \theta_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\psi_1 dS_1 \frac{dS_2 \cos \theta_2}{r_{12}^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\psi_1} =$$

$$= \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dS_1 dS_2 \quad (3-53)$$

Análogamente, el flujo radiante de dS_2 a dS_1 (energía radiante que sale de dS_2 y es interceptada por dS_1 en la unidad de tiempo) será:

$$d\Phi^{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma T_2^4}{\pi} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dS_1 dS_2 \quad (3-54)$$

De este modo, el flujo radiante neto entre dS_1 y dS_2 , cuando ambas superficies son negras, queda:

$$d\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = d\Phi^{1 \rightarrow 2} - d\Phi^{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma}{\pi} (T_1^4 - T_2^4) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dS_1 dS_2 \quad (3-55)$$

quedando el flujo radiante neto entre los cuerpos negros 1 y 2 :

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\pi} (T_1^4 - T_2^4) \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dS_1 dS_2 \quad (3-56)$$

donde la integración está restringida a las parejas de superficies elementales dS_1 y dS_2 que se ven mutuamente. Este resultado se suele expresar en la forma:

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = S_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = S_2 F_{21} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (3-57)$$

donde F_{12} es el factor de forma dado por la expresión

$$F_{12} = \frac{1}{\pi S_1} \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dS_1 dS_2 \quad (3-58a)$$

El factor de forma F_{12} representa la fracción de la radiación que sale de 1 que es interceptada por 2, mientras que la fracción de la energía que sale de 2 que es interceptada por 1 viene dada por el factor de forma F_{21} :

$$F_{21} = \frac{1}{\pi S_2} \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dS_1 dS_2 \quad (3-58b)$$

Dada la simetría de los índices en la integral evidentemente se cumple la *relación de reciprocidad*

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21} \quad (3-59)$$

Cuando las superficies no son negras, la ecuación (3-57) ya no se cumple y a la hora de hacer el balance de energías hay que tener en cuenta la fracción de energía incidente sobre una superficie que no es absorbida sino reflejada. Esto no es tan sencillo como entre superficies negras e incluso para superficies grises la complejidad aumenta de forma notable en el caso general.

3.5.6. Intercambio de calor por radiación en un recinto de paredes convexas o planas de distintos materiales.

Veamos ahora como calcular los factores de forma y la magnitud del intercambio de calor por radiación para un caso particular importante. Este caso particular es el de un recinto cerrado limitado por tres paredes convexas o planas que pueden ser, en general, de distintos materiales o incluso imaginarias. La importancia de este caso que en principio parece tan específico radica en que muchos problemas de factores de forma en recintos más complejos pueden descomponerse en varios problemas de factores de forma en un recinto cerrado o casi cerrado delimitado por tres paredes convexas o planas que no se ven mutuamente.

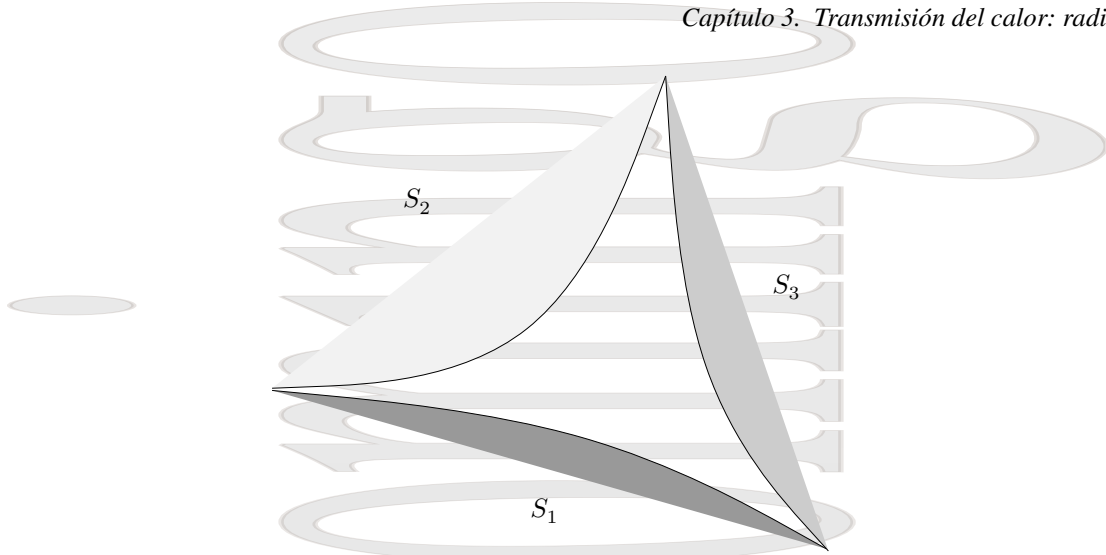


Figura 3–18: Cálculo del factor de forma para el caso de un recinto cerrado delimitado por tres paredes S_1 , S_2 y S_3 convexas o planas, en general de distintos materiales o incluso imaginarias.

Obtención de los factores de forma.

Consideremos las superficies S_1 , S_2 y S_3 de la figura. Como todas ellas son superficies convexas o planas, la radiación emitida por cada una de ellas va a las demás, pero no a sí misma, esto es, no se autoirradia (ya que no se ven a sí mismas). Por tanto, se tiene para los factores de forma de autoirradiación

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0 \quad (3-60)$$

Para un recinto cerrado, la suma de los factores de forma para cada superficie debe ser la unidad. Como las superficies son además convexas y por tanto, los factores de forma de autoirradiación son 0, se tiene que

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = F_{12} + F_{13} = 1 \quad (3-61a)$$

$$F_{21} + F_{22} + F_{23} = F_{21} + F_{23} = 1 \quad (3-61b)$$

$$F_{31} + F_{32} + F_{33} = F_{31} + F_{32} = 1 \quad (3-61c)$$

Introduzcamos ahora un nuevo elemento para simplificar los cálculos. Se denominan *superficies efectivas* a las superficies

$$H_{ij} = S_i F_{ij} \quad (3-62)$$

que tal como están definidas cumplen la condición

$$H_{ij} = H_{ji} \quad (3-63)$$

En función de estas superficies efectivas, las ecuaciones (3–61) se escriben como

$$\begin{aligned} H_{12} + H_{13} &= S_1 \\ H_{21} + H_{23} &= S_2 \\ H_{31} + H_{32} &= S_3 \end{aligned} \quad (3-64)$$

Si tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} H_{12} &= H_{21} \\ H_{13} &= H_{31} \\ H_{23} &= H_{32} \end{aligned} \quad (3-65)$$

la suma de las ecuaciones (3-64) da como resultado

$$H_{12} + H_{13} + H_{23} = \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_3) \quad (3-66)$$

Restando de esta expresión cada una de las ecuaciones (3-64) se tiene

$$\begin{aligned} H_{12} &= \frac{1}{2}(S_1 + S_2 - S_3) \\ H_{13} &= \frac{1}{2}(S_1 + S_3 - S_2) \\ H_{23} &= \frac{1}{2}(S_2 + S_3 - S_1) \end{aligned} \quad (3-67)$$

que da, para los factores de intercambio de calor por radiación entre las superficies convexas S_1 , S_2 y S_3 los resultados

$$F_{12} = \frac{S_1 + S_2 - S_3}{2S_1} \quad (3-68a)$$

$$F_{13} = \frac{S_1 + S_3 - S_2}{2S_1} \quad (3-68b)$$

$$F_{21} = \frac{S_1 + S_2 - S_3}{2S_2} \quad (3-68c)$$

$$F_{23} = \frac{S_2 + S_3 - S_1}{2S_2} \quad (3-68d)$$

$$F_{31} = \frac{S_1 + S_3 - S_2}{2S_3} \quad (3-68e)$$

$$F_{32} = \frac{S_2 + S_3 - S_1}{2S_3} \quad (3-68f)$$

Es decir, la fracción de la energía emitida por una superficie que es recibida por otra es la suma de las superficies entre las que se calcula el factor de forma menos la otra superficie, y todo ello dividido por el doble de la superficie emisora.

Intercambio de calor por radiación entre dos placas paralelas semiinfinitas.

Trataremos ahora un ejemplo de aplicación de lo que se acaba de ver. En la sección 3.5.2 ya se estudió el problema de la transferencia de calor por radiación entre dos planos grises infinitos y paralelos. Ahora abordaremos un problema distinto, representado en la figura 3-19, el de la transferencia de calor por radiación entre dos planos paralelos semi-infinitos (de anchura a) separados una distancia h . En estas condiciones, es evidente que de la radiación emitida por el plano 1 no llega nada al mismo, esto es, $F_{11} = 0$.

Para estudiar este problema y obtener el factor de forma correspondiente, consideraremos el recinto cerrado ABCD, delimitado por las 4 paredes AB, BD, DC y CA, dos reales y dos ficticias. Para la radiación emitida desde la superficie 1 debe cumplirse que la suma de los factores de forma ha de ser la unidad, esto es,

$$F_{12} + F_{1 \rightarrow AC} + F_{1 \rightarrow DB} + F_{1 \rightarrow 1} = F_{12} + F_{1 \rightarrow AC} + F_{1 \rightarrow DB} = 1$$

es decir, que

$$F_{12} = 1 - F_{1 \rightarrow AC} - F_{1 \rightarrow DB}.$$

Ahora bien, cuando se consideran los recintos cerrados ACB y ADB (de nuevo mezclamos superficies reales e imaginarias) formados por tres superficies convexas (planas, es decir en el límite, pero lo suficiente para que no haya

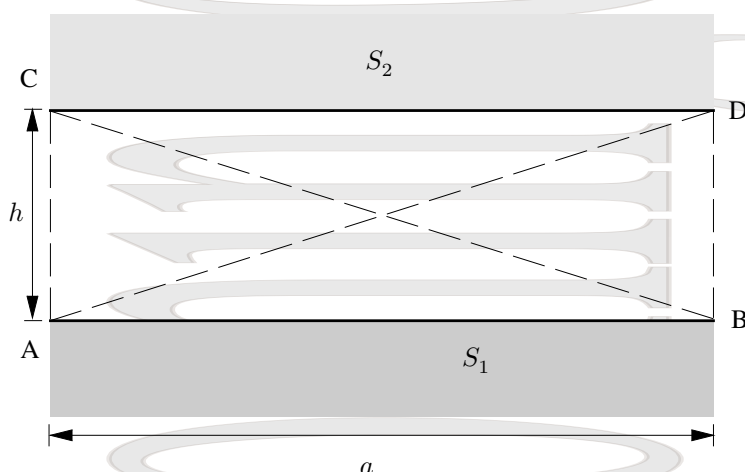


Figura 3-19: Cálculo del factor de forma para el intercambio de calor por radiación entre dos placas semiinfinitas de anchura a , separadas una distancia h .

autoirradiación) se tiene el caso tratado en la sección anterior y por tanto, los factores de forma $F_{1 \rightarrow AC}$ y $F_{1 \rightarrow DB}$ se pueden escribir como

$$F_{1 \rightarrow AC} = \frac{S_1 + S_{AC} - S_{BC}}{2S_1} \quad \text{y} \quad F_{1 \rightarrow DB} = \frac{S_1 + S_{DB} - S_{AD}}{2S_1}. \quad (3-69)$$

Como la anchura de las dos placas es la misma, $S_1 = S_2 = a$. La longitud L de las placas es también la misma (e infinita), por lo que los valores de las superficies $S_{AC} = S_{DB}$ y $S_{BC} = S_{AD}$ son respectivamente

$$S_{AC} = S_{DB} = AB \cdot h = hL$$

$$S_{BC} = S_{AD} = \sqrt{a^2 + h^2} \cdot L$$

Por tanto, los factores de forma $F_{1 \rightarrow AC}$ y $F_{1 \rightarrow DB}$ quedan

$$F_{1 \rightarrow AC} = \frac{a + h - \sqrt{a^2 + h^2}}{2a} \quad \text{y} \quad F_{1 \rightarrow DB} = \frac{a + h - \sqrt{a^2 + h^2}}{2a}$$

y, en definitiva, el factor de forma $F_{12} = 1 - F_{1 \rightarrow AC} - F_{1 \rightarrow DB}$ queda

$$F_{12} = \frac{1}{a} \left(\sqrt{a^2 + h^2} - h \right) \quad (3-70)$$

obteniéndose así la fracción de la energía emitida por la superficie 1 que llega a la superficie 2.

Intercambio de calor por radiación entre un plano infinito y un sistema de cilindros infinitos pegados al mismo.

Otro ejemplo de aplicación de las relaciones (3-68) es el estudio del intercambio de calor por radiación en el sistema formado por un sistema de cilindros paralelos de longitud infinita y diámetro d , con ejes separados una distancia l , en contacto con un plano infinito, como se ve en la figura 3-20.

Ahora se tendrán en consideración los recintos ABCDEA y ABCFEA. Éstos son recintos cerrados delimitados por tres paredes (reales o imaginarias) convexas o planas, por lo que podemos aplicar a los mismos las expresiones (3-68). El factor de forma entre los cilindros 1 y 2 y el plano AB de la figura será la suma de los factores de forma entre cada uno de los cilindros 1 y 2 y el plano AB, de modo que utilizando (3-68) se tiene

$$F_{12 \rightarrow AB} = F_{1 \rightarrow AB} + F_{2 \rightarrow AB} = 2F_{BCD \rightarrow AB} = 2 \frac{S_{AB} + S_{BCD} - S_{DEA}}{2S_{AB}} \quad (3-71)$$

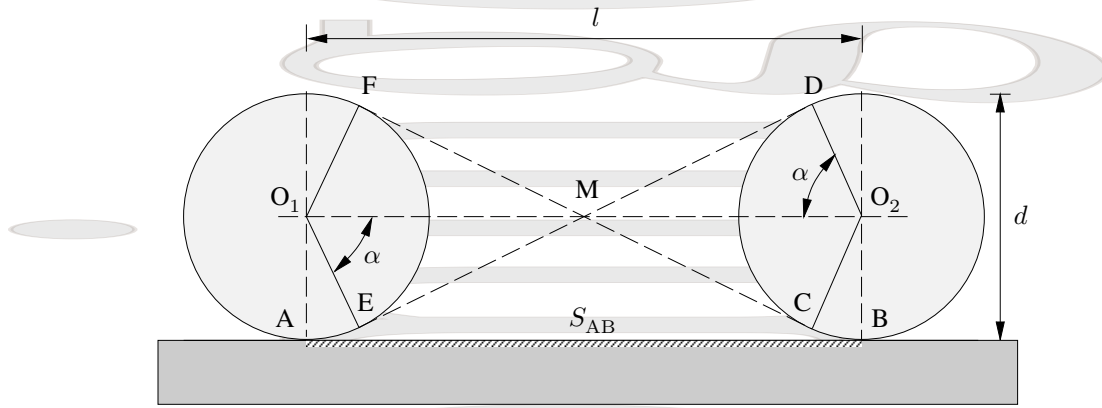


Figura 3–20: Cálculo del factor de forma para el intercambio de calor por radiación entre un plano infinito y un sistema de infinitos cilindros paralelos de diámetro d separados una distancia l .

Los arcos BCD y EA vienen dados por

$$\widehat{BCD} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \frac{d}{2} \quad \widehat{EA} = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{d}{2}$$

y como los lados del triángulo rectángulo EMO_1 cumplen la relación

$$\frac{d^2}{4} + (\overline{EM})^2 = \frac{l^2}{4},$$

la distancia \overline{EM} resulta ser

$$\overline{EM} = \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{d^2}{4}}$$

Así, la longitud $\widetilde{DEA} = \widehat{EA} + 2\overline{EM}$ queda

$$\widetilde{DEA} = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{d}{2} + 2\sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{d^2}{4}}. \quad (3-72)$$

Por otra parte, la tangente del ángulo α viene dada por

$$\tan \alpha = \frac{\overline{EM}}{\overline{EO_1}} = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{d^2}{4}} = \sqrt{\frac{l^2}{d^2} - 1}$$

por lo que el ángulo α resulta ser

$$\alpha = \arctan \sqrt{\frac{l^2}{d^2} - 1}. \quad (3-73)$$

Como la longitud de los cilindros y del plano AB en la dirección perpendicular al plano del papel es infinita, pero la misma, desaparece al sustituir las superficies asociadas a las longitudes anteriores en la ecuación (3-71), quedando

$$F_{12 \rightarrow AB} = \frac{S_{AB} + S_{BCD} - S_{DEA}}{S_{AB}} = \frac{l + \widehat{BCD} - \widetilde{DEA}}{l} \quad (3-74)$$

Sustituyendo sus valores, la diferencia entre las longitudes BCD y DEA que aparece en esta expresión queda

$$\widehat{BCD} - \widetilde{DEA} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \frac{d}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{d}{2} - \sqrt{l^2 - d^2} = \alpha d - \sqrt{l^2 - d^2}$$

y por tanto, a partir de la ecuación (3-74) se obtiene el factor de forma deseado

$$F_{12 \rightarrow AB} = 1 + \frac{d}{l} \alpha - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2} + \frac{d}{l} \arctan \sqrt{\frac{l^2}{d^2} - 1} \quad (3-75)$$

3.5.7. Cálculo analítico del factor de forma en sistemas sencillos de superficies rectangulares.

En algunos casos favorables puede obtenerse el factor de forma por integración analítica de la ecuación (3-56). Estudiaremos alguno de esos casos y algunas relaciones útiles que permiten obtener el valor del factor de forma en otros casos.

Intercambio de calor por radiación entre dos rectángulos perpendiculares que comparten una arista.

Para obtener el factor de forma entre dos rectángulos perpendiculares que comparten una arista consideraremos las superficies infinitesimales dS_1 y dS_2 sobre cada una de las superficies como se muestra en la figura 3-21. Si denominamos x_1 a la variable x cuando se recorre la superficie 1 y x_2 a la misma variable x cuando se recorre la superficie 2, el cuadrado del vector posición relativa entre las dos superficie, r_{12} se escribe como

$$r_{12}^2 = r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - 0)^2 + (0 - z_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + y^2 + z^2$$

donde por simplicidad hemos escrito $y_1 \equiv y$ y $z_2 \equiv z$ ya que en ambos casos no hay confusión y se sabe qué superficie recorre cada una de estas variables durante la integración y también $r_{12} \equiv r$. Observando la figura se tiene que cada uno de los ángulos θ_1 y θ_2 vienen dados por las expresiones

$$\cos \theta_1 = \frac{z}{r} \quad \cos \theta_2 = \frac{y}{r}$$

por lo que la ecuación (3-56) queda en la forma

$$F_{12} = \frac{1}{\pi S_1} \int_0^c \int_0^b dy dz \int_0^a dx_2 \int_0^a \frac{zy}{[(x_1 - x_2)^2 + y^2 + z^2]^2} dx_1$$

donde a , b y c son las dimensiones de los rectángulos. La integración analítica de esta expresión es compleja, pero da como resultado

$$F_{12} = \frac{1}{\pi W} \left(W \arctan \frac{1}{W} + H \arctan \frac{1}{H} - \sqrt{H^2 + W^2} \arctan \frac{1}{\sqrt{H^2 + W^2}} + \right. \\ \left. \frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{(1 + W^2)(1 + H^2)}{1 + W^2 + H^2} \left[\frac{W^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + W^2)(H^2 + W^2)} \right]^{W^2} \left[\frac{H^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + H^2)(H^2 + W^2)} \right]^{H^2} \right\} \right) \quad (3-76)$$

en función de $H = c/a$ y $W = b/a$. Por comodidad, en vez de trabajar con la compleja expresión (3-76) se trabaja con la misma representada gráficamente como se muestra en la figura 3-22.

Un caso particular de lo anterior se tiene cuando las dos superficies que comparten una arista son cuadrados. En este caso, $H = c/a = W = b/a = 1$ y el factor de forma queda $F_{12} = 0,2$ para cualquier tamaño de los cuadrados (ambos el mismo).

Esto lleva a otro caso particular, el de un cubo hueco, en el que como hemos visto, el factor de forma entre una cara y cada una de las caras adyacentes será 0,2, y por tanto el factor de forma entre esa cara y la cara opuesta será también de 0,2, al ser todas las superficies iguales y en ese caso la suma de los factores de forma entre esa cara y cada una de las otras caras la unidad. de esta forma, la transferencia de calor que tiene lugar a partir de una de las caras de un cubo hueco se reparte por igual entre las demás caras.

Relación entre los factores de forma para dos rectángulos perpendiculares alineados con una arista paralela.

La relación anterior (3-76) permite en la práctica obtener el factor de forma para cualesquiera dos áreas rectangulares perpendiculares alineados con una arista paralela. Para ello basta con tener en cuenta el carácter aditivo de la integración de la ecuación (3-76). Consideremos el sistema de la figura 3-23, que será el sistema que nos mostrará la idea básica que emplearemos en otros sistemas más complejos. En este sistema se tienen dos superficies rectangulares

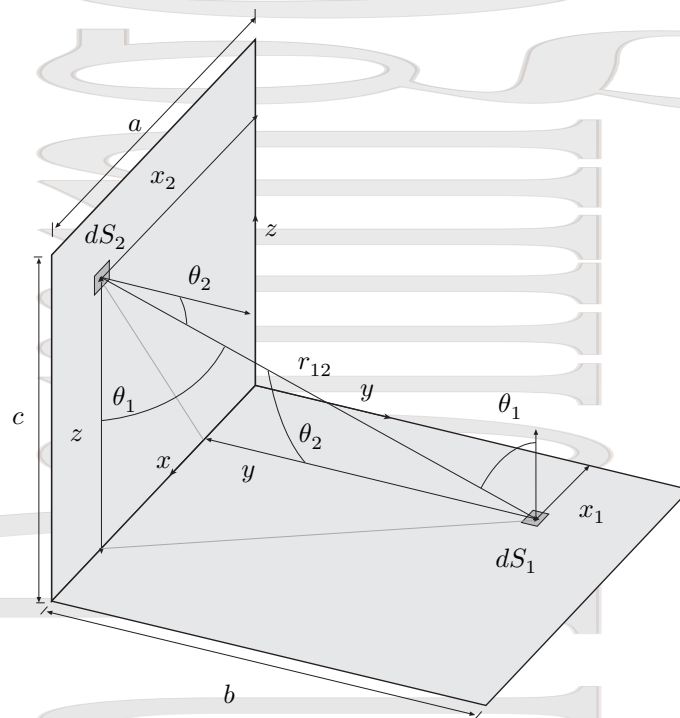


Figura 3-21: Cálculo del factor de forma en el intercambio de calor por radiación entre dos rectángulos perpendiculares que comparten una arista.

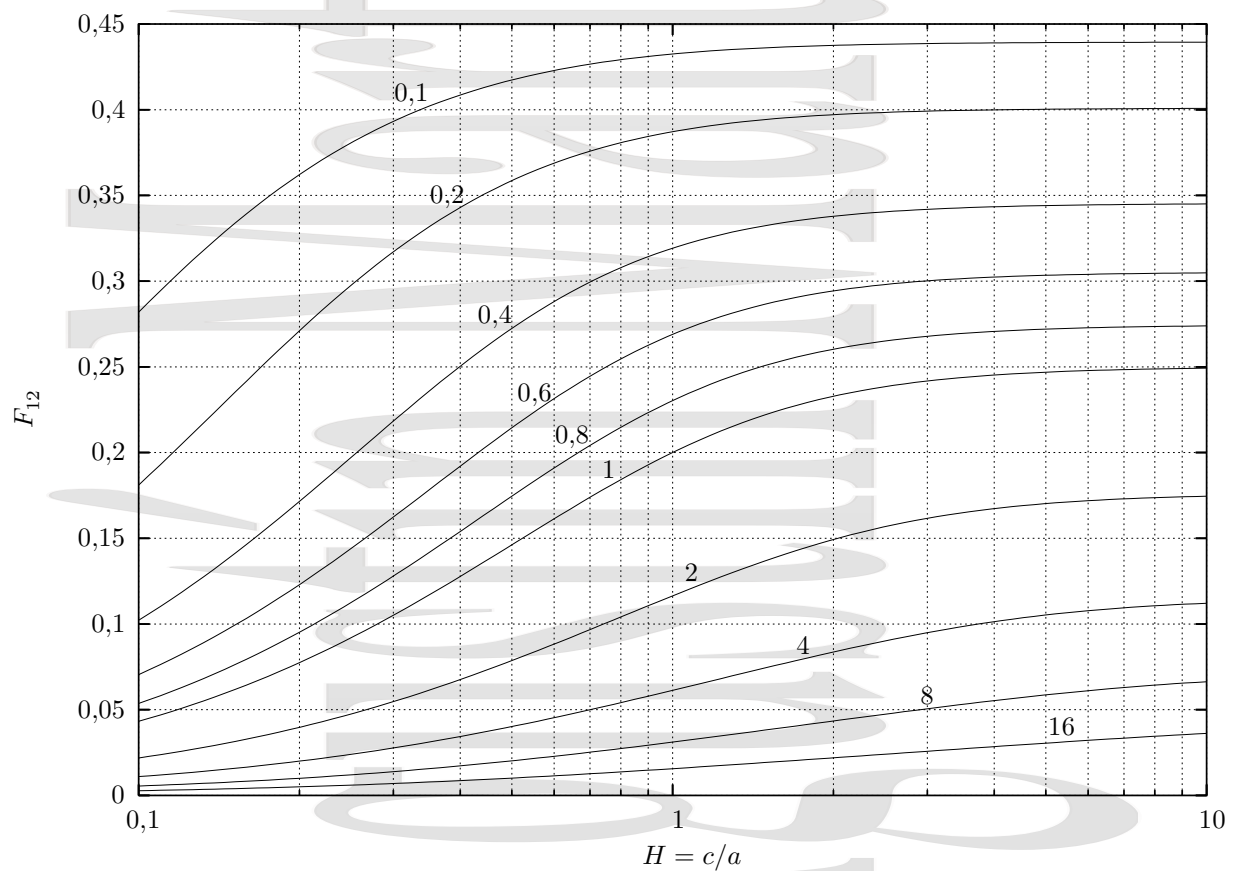


Figura 3-22: Representación gráfica del factor de forma de radiación para el caso de dos rectángulos perpendiculares con una arista común en función de los cocientes $H = c/a$ y $W = b/a$.

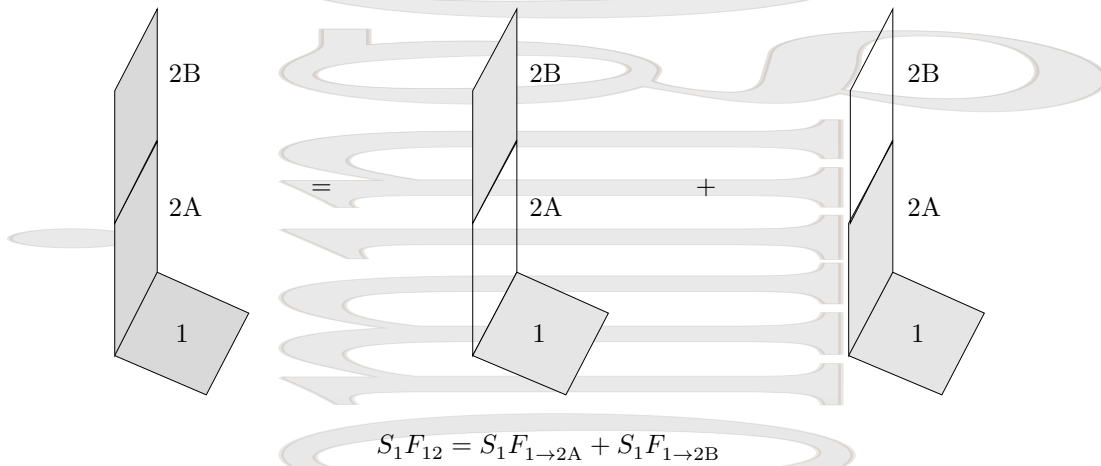


Figura 3-23: El factor de forma $F_{1 \rightarrow 2A}$ puede obtenerse fácilmente a partir de los factores de forma F_{12} y $F_{1 \rightarrow 2B}$, que pueden obtenerse directamente a partir de la ecuación (3-76), y de los valores de las superficies S_1 , S_{2A} y S_{2B} , que son conocidos.

alineadas con una arista coincidente como las que hemos analizado en la sección anterior. Si descomponemos una de ellas (la 2 en este caso) en dos superficies rectangulares 2A y 2B con la arista coincidente paralela a la arista común anterior podemos analizar el conjunto como un sistema de tres superficies rectangulares.

Como la radiación emitida por 1 que llega a 2 llegará bien a la superficie 2A o a la 2B, el factor de forma F_{12} que nos da la fracción de la radiación emitida desde la superficie 1 que llega a la superficie 2 será la suma de los factores de forma $F_{1 \rightarrow 2A}$ y $F_{1 \rightarrow 2B}$

$$F_{12} = F_{1 \rightarrow 2A} + F_{1 \rightarrow 2B}$$

y, por tanto, podemos despejar el factor de forma $F_{1 \rightarrow 2B}$ que no corresponde al caso de la sección anterior en función de los factores F_{12} y $F_{1 \rightarrow 2A}$ que sí lo hacen

$$F_{1 \rightarrow 2B} = F_{12} - F_{1 \rightarrow 2A} \quad \text{o} \quad S_1 F_{1 \rightarrow 2B} = S_1 F_{12} - S_1 F_{1 \rightarrow 2A} \quad (3-77)$$

Podemos utilizar esta expresión y el método subyacente para obtener el factor de forma deseado en otros casos más complejos como el que se presenta en la figura 3-24. Ahora descomponemos cada una de las superficies rectangulares 1 y 2 en dos rectángulos con la arista coincidente paralela a la arista común original.

Haciendo primero la separación en la superficie 2 se tiene la ecuación ya vista (3-77)

$$S_1 F_{12} = S_1 F_{1 \rightarrow 2A} + S_1 F_{1 \rightarrow 2B}.$$

Como a su vez la radiación emitida por 2A sobre la superficie 1 llegará bien a la superficie 1A o bien a la 1B se tiene, utilizando la relación de reciprocidad (3-59)

$$S_{2A} F_{2A \rightarrow 1} = S_{2A} F_{2A \rightarrow 1A} + S_{2A} F_{2A \rightarrow 1B} \Rightarrow S_1 F_{1 \rightarrow 2A} = S_{1A} F_{1A \rightarrow 2A} + S_{1B} F_{1B \rightarrow 2A}$$

y del mismo modo, como la radiación emitida por 2B sobre la superficie 1 llegará bien a la superficie 1A o bien a la 1B se llega a

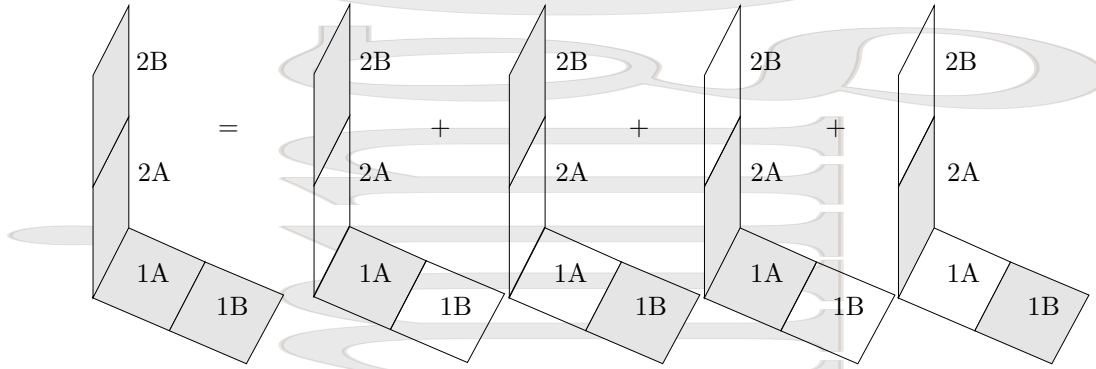
$$S_{2B} F_{2B \rightarrow 1} = S_{2B} F_{2B \rightarrow 1A} + S_{2B} F_{2B \rightarrow 1B} \Rightarrow S_1 F_{1 \rightarrow 2B} = S_{1A} F_{1A \rightarrow 2B} + S_{1B} F_{1B \rightarrow 2B}.$$

Juntando todo se obtiene la expresión

$$S_1 F_{12} = S_{1A} F_{1A \rightarrow 2A} + S_{1A} F_{1A \rightarrow 2B} + S_{1B} F_{1B \rightarrow 2A} + S_{1B} F_{1B \rightarrow 2B}$$

en la que F_{12} y $F_{1A \rightarrow 2A}$ pueden obtenerse directamente de la expresión (3-76) y tanto $F_{1A \rightarrow 2B}$ como $F_{1B \rightarrow 2A}$ indirectamente a través de la expresión (3-77) particularizada a este caso

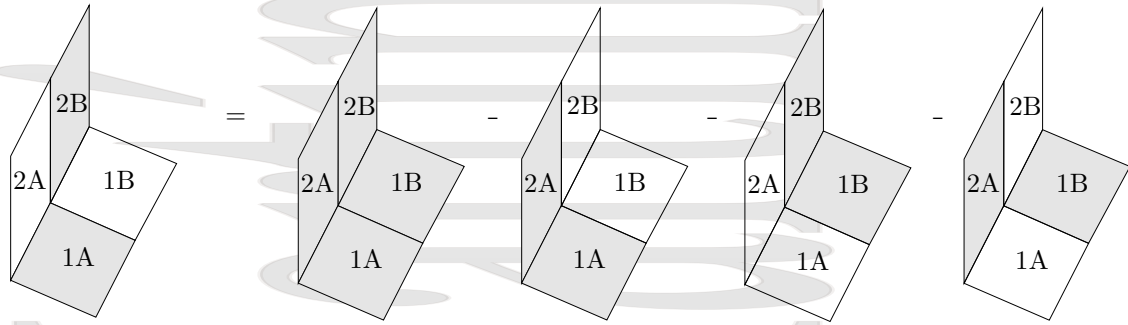
1A → 2	$S_{1A} F_{1A \rightarrow 2} = S_{1A} F_{1A \rightarrow 2A} + S_{1A} F_{1A \rightarrow 2B} \Rightarrow S_{1A} F_{1A \rightarrow 2B} = S_{1A} F_{1A \rightarrow 2} - S_{1A} F_{1A \rightarrow 2A}$
2A → 1	$S_{2A} F_{2A \rightarrow 1} = S_{2A} F_{2A \rightarrow 1A} + S_{2A} F_{2A \rightarrow 1B} \Rightarrow S_{1B} F_{1B \rightarrow 2A} = S_{2A} F_{2A \rightarrow 1} - S_{2A} F_{2A \rightarrow 1A}$



$$S_{1A}F_{12} = S_{1A}F_{1A \rightarrow 2B} + S_{1B}F_{1B \rightarrow 2B} + S_{1A}F_{1A \rightarrow 2A} + S_{1B}F_{1B \rightarrow 2A}$$

El factor de forma $F_{1B \rightarrow 2B}$ puede obtenerse de una forma también simple, pero un poco más compleja que antes a partir de los factores de forma F_{12} y $F_{1A \rightarrow 2A}$, que pueden obtenerse directamente a partir de la ecuación (3-76), de los valores de los factores de forma $F_{1A \rightarrow 2B}$ y $F_{1B \rightarrow 2A}$, que pueden obtenerse como se ha visto en la figura 3-23 y de los valores de las superficies S_{1A} , S_{2A} , S_{1B} y S_{2B} , que son conocidos.

Figura 3-24: Relación entre los factores de forma para cualesquiera dos áreas rectangulares perpendiculares con una arista paralela. Ejemplo para cuatro subáreas.



$$S_{1A}F_{1A \rightarrow 2B} = S_1F_{12} - S_{1A}F_{1A \rightarrow 2A} - S_{1B}F_{1B \rightarrow 2B} - S_{1B}F_{1B \rightarrow 2A}$$

Figura 3-25: Cálculo del factor de forma para el caso de dos superficies rectangulares no alineadas pero con aristas en contacto según una línea común.

quedando finalmente

$$S_{1B}F_{1B \rightarrow 2B} = S_1F_{12} - S_{2A}F_{2A \rightarrow 1} - S_{1A}F_{1A \rightarrow 2} + S_{2A}F_{2A \rightarrow 1A} \quad (3-78)$$

Un procedimiento similar puede utilizarse en el caso de dos superficies rectangulares perpendiculares no alineadas pero con aristas en contacto según una línea común que se presenta en la figura 3-25.

Obsérvese que en los casos de las figuras 3-23, 3-24 y 3-25, la superficie efectiva entre las superficies totales 1 y 2 es la suma de las superficies efectivas $H_{ij} = S_i F_{ij}$ entre todos los pares de superficies parciales de una y otra que se ven mutuamente.

Asimismo, si ambas superficies son negras se cumple la relación ya conocida

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = S_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = S_2 F_{21} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (3-57)$$

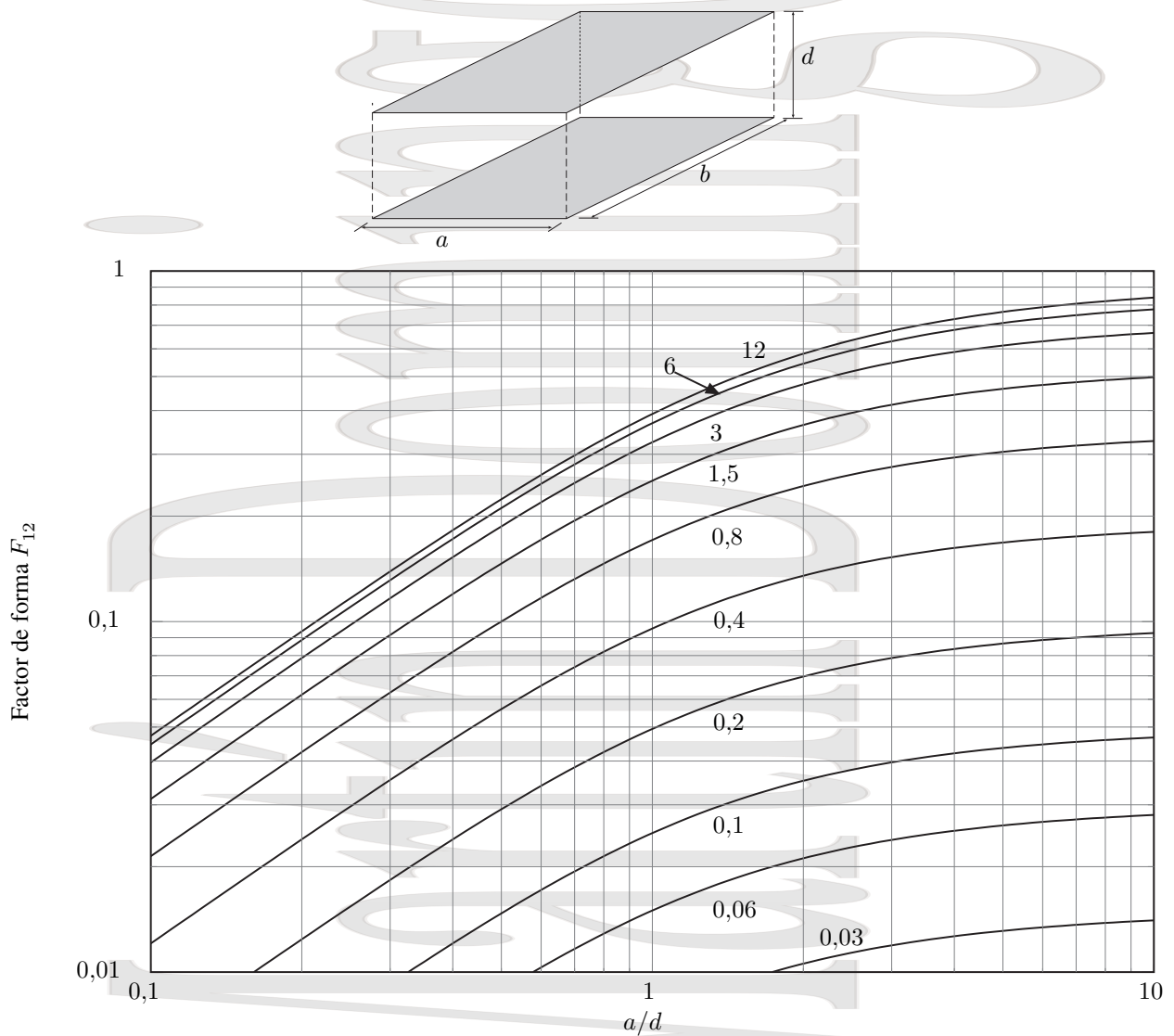


Figura 3-26: Representación gráfica del factor de forma de radiación para el caso de dos rectángulos paralelos alineados en función de los cocientes a/d (en el eje x) y b/d (representado por cada una de las líneas señaladas en la gráfica).

Intercambio de calor por radiación entre dos superficies rectangulares iguales y paralelas colocadas de frente a una distancia d .

En este caso, el factor de forma resultante puede escribirse como

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi XY} \left(\ln \sqrt{\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2}} - X \arctan X - Y \arctan Y + \right. \\ \left. X\sqrt{1+Y^2} \arctan \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} + Y\sqrt{1+X^2} \arctan \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} \right) \quad (3-79)$$

donde hemos expresado el factor de forma en función de los cocientes $X = a/d$ y $Y = b/d$. De forma similar al caso de los rectángulos perpendiculares que comparten un eje, puede obtenerse mediante una serie de combinaciones adecuadas el valor del factor de forma para el intercambio de radiación entre dos superficies rectangulares negras de

cualquier tamaño con aristas paralelas.

Al igual que en el apartado anterior, si ambas superficies son negras se cumple la relación

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = S_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = S_2 F_{21} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (3-57)$$

Índice alfabético

A

absorbente perfecto, 35
absorción
 coeficiente de, 35
 reducido, coeficiente de, 53
absortancia, 35
absortividad, 35
 reducida, 53, 55
análisis dimensional, 12
atenuación, coeficiente de, 35

B

Boltzmann, constante de, 38
brillo, 44

C

campo de temperaturas, 3
capa límite, 11
 de velocidad, 12
 hidrodinámica, 12
 térmica, 12
cavidad, 36
coeficiente
 aire-aire, 19
 aire-superficie, 10
 de absorción, 35
 reducido, 53, 55
 de atenuación, 35
 de convección, 10, 11
 promedio, 11
 de difusión, 27
 al vapor, 29
 molecular, 27
 térmica, 30
 de película, 10, 11
 de reflexión, 35
 de transmisión, 35
 del calor aire-superficie, 11
 superficial del calor, 10, 11
 global
 de conducción, 18
 de transmisión, 18
 lineal
 de conducción, 21
 de transmisión del calor aire-aire, 23
 de transmisión del calor superficie-superficie, 21
 global de conducción, 22
 global de transmisión del calor, 23
 global de transmisión superficie-superficie, 22
 superficie-superficie, 18
concentración
 difusión por, 27
 gradiente de, 27
condensación
 intersticial, 27
 superficial, 27
condición de no deslizamiento, 11
condiciones de contorno, 10
 de cuarta especie, 10
 de Dirichlet, 10
 de primera especie, 10

 de segunda especie, 10
 de tercera especie, 10
 de von Neumann, 10
conducción, 3
 ecuación diferencial de, 8
conductancia, 18
conductividad térmica, 5
 principal, 9
 tensor, 9
constante
 de Boltzmann, 38
 de Planck, 31, 38
 de Stefan-Boltzmann, 41
 solar, 34
convección, 10, 27
 con cambio de fase, 15
 forzada, 11
 natural, 11
cuerpo
 gris, 44
 negro, 35, 37

D

densidad
 de flujo de difusión, 26, 28
 de flujo energético, 33
 de flujo radiante, 48
 de flujo térmico, 4
difusión, 26
 coeficiente de, 27
 del vapor, 27
 densidad de flujo, 26
 flujo de, 26
 molecular, 26
 por concentración, 27
 térmica, 30
 térmica, coeficiente de, 30
difusividad
 al vapor, 28
 del aire en reposo, 28
 térmica, 8
Dirichlet, condiciones de contorno, 10

E

ecuación
 de Fourier, 8
 de Laplace, 8
 de Poisson, 8
 diferencial de la conducción, 8
efecto invernadero, 46
emisividad
 espectral, 42
 total, 42
emitancia radiante, 33, 48
 espectral, 33
energía radiante, 33
 densidad de, 36
espectro
 de emisión
 continuo, 32
 selectivo, 32

- de la radiación, 32
- visible, 32
- espesor equivalente de aire, 29
- exitancia radiante, 33
 - espectral, 33
- F**
- factor
 - de emisión monocromático, 42
 - de forma, 54–56
 - de intercambio de radiación, 56
 - de resistencia al vapor, 28
- Fick, ley de, 26, 28
- flujo
 - de calor, 4
 - de difusión, 26
 - energético, 33
 - energético de una fuente, 33
 - fotónico de una fuente, 33
 - laminar, 12
 - monocromático, 33
 - radiante
 - de una fuente, 33
 - densidad neta, 48
 - efectivo, 50, 54
 - espectral de una fuente, 33
 - neto, 50, 54
 - térmico, 4
 - turbulento, 12
- Fourier
 - ecuación de, 8
 - ley de, 5, 8
- frecuencia de la onda, 31
- función de radiación del cuerpo negro, 41
- G**
- Gauss, teorema de, 7
- gradiente
 - de concentración, 27
 - de temperaturas, 5
 - térmico, 30
- Grashoff, número de, 14
- I**
- intensidad
 - específica, 44
 - radiante, 44
 - espectral, 44
- irradiancia, 34
 - espectral, 34
- isoterma, 3
- K**
- Kirchoff, ley de, 43
- L**
- Lambert, ley de, 45
- Laplace, ecuación de, 8
- ley
 - de enfriamiento de Newton, 11
 - de Fick, 26, 28
 - de Fourier, 5, 8
 - en medios anisótropos, 9
 - de Kirchoff, 43
 - de la radiación difusa, 45
 - de Lambert, 45
 - de Newton, 10
 - de Planck, 38
- de Rayleigh-Jeans, 40
- de Stefan-Boltzmann, 40
- del coseno de Lambert, 46
- del desplazamiento de Wien, 39
- longitud de onda, 31
- luminancia, 44
- M**
- métodos de semejanza, 12
- muro
 - compuesto, 17
 - con convección, 19
 - simple, 16
 - con convección, 18
- N**
- Newton
 - ley de, 10
 - ley de enfriamiento, 11, 18
- número
 - de Grashoff, 14
 - de Nusselt, 12
 - de Prandtl, 13
 - de Rayleigh, 15
 - de Reynolds, 12
 - crítico, 12
- Nusselt, número de, 12
- O**
- ondas electromagnéticas, 31
- P**
- pared cilíndrica
 - compuesta
 - con conducción y convección, 23
 - condiciones de primera especie, 21
 - sin convección, 21
 - simple
 - condiciones de primera especie, 20
 - sin convección, 20
- pared esférica
 - simple
 - con convección, 25
 - condiciones de primera especie, 24
 - condiciones de tercera especie, 25
 - sin convección, 24
- permeabilidad al vapor, 28
- permeancia al vapor, 29
- Planck
 - constante de, 38
 - ley de, 38
- poder
 - absorbente, 35
 - de transmisión, 35
 - emisivo, 33, 48
 - reflector, 35
- Poisson, ecuación de, 8
- potencia
 - radiante
 - de una fuente, 33
 - espectral de una fuente, 33
- Prandtl, número de, 13
- R**
- radiación
 - difusa, 38, 45
 - efectiva, 48
 - electromagnética, 31

- emergente, 48
 neta, 48
 solar
 constante solar, 34, 47, 49
 efecto invernadero, 46, 47
 máximo de emisión, 39
 superficies selectivas, 46, 49
 térmica, 32
 visible, 32
 radiancia, 44
 angular, 46
 espectral, 44
 radiosidad, 48
 Rayleigh, número de, 15
 Rayleigh-Jeans, ley de, 40
 reflectancia, 35
 reflectividad, 35
 reflector perfecto, 35
 reflexión, coeficiente de, 35
 régimen
 estacionario, 8
 laminar, 12, 13, 15
 permanente, 8
 turbulento, 12, 13, 15
 relación de reciprocidad, 57
 resistencia
 al vapor, 29
 térmica
 global a la conducción, 18
 pared plana compuesta, aire-aire, 19
 pared plana compuesta, conducción, 18
 pared plana compuesta, superficie-superficie, 18
 pared plana compuesta, transmisión, 19
 total, 19
 térmica absoluta, 19
 pared cilíndrica compuesta, aire-aire, 23
 pared cilíndrica compuesta, conducción, 22
 pared cilíndrica compuesta, superficie-superficie, 22
 pared cilíndrica compuesta, transmisión, 23
 pared esférica compuesta, transmisión, 25
 pared esférica simple, conducción, 24
 pared esférica simple, transmisión, 25
 pared plana compuesta, aire-aire, 20
 pared plana compuesta, transmisión, 20
 térmica lineal, 23
 a la conducción, 21
 aire-aire, 23
 superficie-superficie, 21
 térmica lineal global
 a la conducción, 22
 superficie-superficie, 22
 resistividad al vapor, 28
 del aire en reposo, 28
 Reynolds, número de, 12
- S**
 Stefan-Boltzmann
 constante de, 41
 ley de, 40
 superficie
 efectiva, 58
 gris, 44
 isoterma, 3
 negra, 37
 opaca, 35
 perfectamente absorbente, 35
 reflectora perfecta, 35
 selectiva, 46, 48
 vista, 44
- T**
 temperatura
 campo de, 3
 de película, 14
 de rocío, 27
 gradiente de, 5, 30
 tensión de vapor, 28
 tensor conductividad térmica, 9
 Teorema de Gauss, 7
 transmisión, coeficiente de, 35
 transmitancia, 18, 35
 transmitividad, 35
- V**
 valor $-\mu$, 28
 valor $-R$, 19
 viscosidad
 cinemática, 12
 dinámica, 12
 von Neumann, condiciones de contorno, 10
- W**
 Wien, ley del desplazamiento de, 39

Referencias

- [1] Aguilar Peris, J., *Curso de termodinámica*. Ed. Alhambra, 1989.
- [2] Holman, J. P., *Transferencia de calor*. Mc Graw-Hill, 1998.
- [3] Isachenko, V. P., V. A. Osipova y A. S. Sukomel, *Heat transfer*. Ed. Mir, Moscú, 1977.
- [4] Chapman, A. J., *Transferencia de calor*. Librería Editorial Bellisco, Madrid, 3ª edición, 1990.
- [5] Bejan, A., *Heat transfer*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1993.
- [6] Cornwell, K., *Transferencia de calor*. Ed. Limusa, México, 1981.
- [7] Çengel, Y. A., *Transferencia de calor*. McGraw Hill, México, 2ª edición, 2004.
- [8] Ojotin, V., V. Zhidkij, V. Laviguin y F. Salomzoda, *Fundamentos de termotecnia*. Ed. Mir, Moscú, 1988.
- [9] Parsons, R. (editor), *1997 ASHRAE Handbook: Fundamentals*. ASHRAE Handbook Fundamentals, American Society of Heating, Refrigerating and Air Conditioning Engineers, 1997.
- [10] Churchill, S. W. y H. Chu, *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 1323–1329, 1975.
- [11] *Norma básica de la edificación CT-79: Condiciones térmicas en los edificios*. (Normativas), Ministerio de Fomento, Madrid, 1997, ISBN: 9788474331783.
- [12] The Chartered Institution of Building Services Engineers London, *CIBSE guide A: environmental design*. CIBSE, Londres, 2006.
- [13] British Standard Institution, *BS-EN-12524:2000: Building materials and products. Hygrothermal properties. Tabulated design values*. BSI, Londres, 2000.
- [14] Anderson, H. L. (editor), *Physics Vademecum*. American Institute of Physics, N. York, 1981.